MATEMATICA PER TUTTI (O QUASI)

Numeri, parabole, probabilità, prodotti notevoli, limiti, derivate, integrali, aneddoti matematici.
Come apprendere alcuni punti chiave della materia più odiata e possibilmente uscirne vivi.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

G. Grant Indite

Copyright © gabvan

Tutti i diritti riservati. Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta o inserita in un sistema di riproduzione o trasmessa in qualsiasi forma e con qualsiasi mezzo in formato elettronico, meccanico, su fotocopia, come registrazione o altro per qualsiasi scopo senza il permesso scritto dell'autore e dell'editore.

Autore: G. Grant Indite

Sommario

Primo giorno di scuola 4
Costruiamo le fondamenta. 6
I numeri 6
Gli intervalli 12
Fughiamo qualche dubbio 15
O ce l'hai o non ce l'hai 25
Eratostene 30
Il Crivello 30
Misura del raggio della Terra 31
Prodotti notevoli, la strada a doppio senso di marcia 39
Le formule 39
Inversione a U 42
Probabilità 44
Saette o lotterie? 44
Probabilità creativa 49
La legge dei grandi numeri, beata ignoranza. 54
Scommettiamo che...Risparmiamo la memoria? 56
La temutissima triade 71
Limiti 71
Derivate 79
Integrali 81
Gioventù non bruciata 85

Primo giorno di scuola

Le sette e cinquantacinque di un tragico lunedì di metà settembre.
La temperatura è gradevole, splende un sole meraviglioso e in questo momento a Monterosso i guardaspiaggia staranno sicuramente sistemando gli ombrelloni per il godimento dei bagnanti di fine stagione.
Costoro, privilegiati, nuoteranno nelle cristalline acque dopodiché si asciugheranno ai rincuoranti tiepidi raggi della stella madre del sistema solare.
Avrei voluto essere lì e non nel luogo in cui mi trovo.
Bagno, doccia, panino, birretta, un bel libro.
Oppure i Pearl Jam a manetta a ricordarmi di essere vivo mentre muscoli e ossa giacciono molli sul lettino.
Brutti bastardi vacanzieri e pensionati!
Invece io sono qui! Cavolo!
Immobile nel parcheggio con lo sguardo rivolto al mastodontico decadente edificio dell'istituto tecnico commerciale.
Ho mal di testa, nausea e tremo per la paura che mi prenderanno tutti per i fondelli.
Farò sicuramente una gigantesca, indimenticabile, memorabile figura di cacca che verrà tramandata di generazione in generazione e non potrò più uscire dalla mia cameretta!
Ma aspetta un attimo, io la cameretta manco ce l'ho.
Ho passato da poco i trenta e dormo in un comodissimo letto a due piazze e mezzo con mia moglie e se per quello la cameretta non l'avevo neppure quando ero quattordicenne e vivevo con i miei.
Ma questa è un'altra storia.
Non sono uno studente ma il prof!
E allora perché sono io ad aver paura?
Non dovrebbero essere i ragazzi a temermi, e possibilmente rispettarmi, piuttosto che il contrario?
La cosa incredibile è che non è neanche il mio esordio come insegnante visto che svolgo questo mestiere ininterrottamente da oltre quindici anni.
Eppure, ogni anno sempre la stessa storia.
Va un po' meglio quando sto per entrare in una mia vecchia classe dove conosco tutti e tutti conoscono il sottoscritto ma oggi debutto con una temutissima prima superiore.

Ventotto lanzichenecchi esagitati appena usciti dalle medie che non vedono l'ora di annientare il nemico, che poi sarei io.
Entro dal portone principale passando accanto alla preside stanca di farmi notare che sono in ritardo.
È consapevole che anche in quest'anno scolastico le mie brutte abitudini non cambieranno.
Mi vengono incontro sorridenti alcuni alunni dell'ultimo anno.
Ci salutiamo con affetto e inizierebbero a raccontarmi tutte le loro peripezie estive se non fosse che anch'essi sono in ritardo.

- "Ci si vede all'ultima ora prof"

Corro su per le scale sotto lo sguardo tranquillizzato della preside.
È consapevole che anche in quest'anno scolastico le mie buone abitudini non cambieranno.
L'aurea di un ex casinista rompiballe incubo dei professori che a quattordici anni pianificò, fortunatamente senza successo grazie alla sua congenita pigrizia, di dare fuoco alla scuola, i pischelli la captano da distanze siderali.
Sento un casino bestiale da venti metri di distanza e intravedo volteggiare aeroplanini di carta che uscendo dalla porta della prima A planano sul pavimento.
Ne raccolgo uno, inalo una considerevole quantità di ossigeno per farmi coraggio e varco il Rubicone.
Si comincia!

Costruiamo le fondamenta.

I numeri

Non si parte dal tetto quando si costruisce una casa.
Vecchio e perché no, palloso detto, che coloro che rientrano per definizione nell'appellativo ironico e spregiativo (più spregiativo che ironico) attribuito dai giovani a chiunque mostri atteggiamenti o modi di pensare ritenuti, dai giovani stessi, superati, inutili, ritriti: l'aborritissimo *boomer*.
A maggior ragione, come vedremo più avanti, le fondamenta della matematica sono non solo importanti ma irrinunciabili così ragazzo mio, quando chiamerai boomer, dopo applicheremo alcuni elementi di matematica di base all'etimologia di tale termine, a chi è nato dopo la seconda metà degli anni sessanta, comprenderai di avere detto una colossale boiata.
Ma torniamo alla matematica.
Cosa identifica lo sport del calcio? Il pallone.
Il nuoto? L'acqua.
Le discipline invernali? La neve, il ghiaccio, il freddo.
Quindi da cosa inizieremo dato che parliamo di matematica? Dai numeri, ovvio.
Piccolo appunto per i sapientoni (prevenire è meglio che curare).
Il presente libro lungi dal pretendere di divenire testo universitario.
Non vuole essere nemmeno un libro scolastico.
State tranquilli e rilassati, non solo non è intenzione dell'autore vincere la medaglia Fields (uno dei massimi riconoscimenti accademici per un matematico brillante) ma egli non auspica neanche a guadagnarsi il premio per aver pubblicato il miglior manuale di matematica scritto dai condomini del palazzo in cui vive.
Ergo, non iniziate a borbottare o peggio ancora a inviarmi e-mail citando spazi vettoriali, assiomi di Peano, teoremi di topologia.
Questo è un libro per chi odia o non capisce la materia dalle elementari.
Nasce dall'esperienza pluriennale di un insegnante che si è fatto il mazzo affinché lo studente G rinunciasse a gettare la sua vecchia prof. dalla finestra o la giovane amica M abbandonasse l'ipotesi di dare fuoco alla scuola e che P, S, T, W e altri dei loro compagni la

smettessero di temere equazioni, parabole, derivate, successioni numeriche, perché questi argomenti sono alla portata di tutti.
Ripeto, sono alla portata di tutti!
Quindi, come anticipato, cerchiamo di saperne qualcosina di più sui numeri.
Iniziamo dai **Naturali**:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots \infty\}$$

Guardiamoli per bene.
Niente virgole.
Partono dallo zero quindi nei naturali non ci sono numeri negativi (cioè minori di zero).
Il più grande è…?
Domanda facile dalla risposta complicata.
Il più grande non esiste, non c'è, non è pervenuto.
È stato convocato per le feste di Natale ma non si è fatto vedere.
Un avvocato gli ha inviato una raccomandata con ricevuta di ritorno che è tornata al mittente perché il destinatario è introvabile.

- Ma allora prof quell'otto orizzontale scritto per ultimo?

Quell'otto è un bel dilemma.
Pensate che io e il mio amico P, grandissimo matematico, anni fa quando eravamo ancora degli studentelli alle prime armi, abbiamo persino litigato con un pezzo grosso della tv, un famosissimo ingegnere-filosofo, per colpa di quel coso.

- Vi siete menati?

- Quasi. No, scherzo. Comunque, alla fine si è arreso e ha ammesso che avevamo ragione noi.

Quel simbolo è noto come *Infinito* e, per riassumere, può essere considerato a tutti gli effetti il numero più grande che ci sia.

- E quanto vale? Qualcosa tipo con centomila zeri?

Il discorso non è così semplice.

In effetti l'infinito non può essere superato da nessun numero ma non possiamo assegnarli alcun valore.
È come un numero che non smette mai di crescere e assorbe tutti gli altri.
Facciamo qualche esempio.
Proviamo a calcolare

$$\infty + 1$$

Sapete quanto viene? Sempre infinito!
Un po' come se in futuro uno di voi guadagnasse un miliardo di euro al mese e un bel giorno il capo ufficio lo convocasse per dargli l'abbagliante comunicato: lo stipendio gli verrà incrementato di un centesimo!
È cambiato qualcosa nelle tasche del nostro fortunato amico?
Ma la cosa ancora più strana è che l'infinito si comporta allo stesso modo anche con numeri molto più grandi.
Quanto fa questo?

$$\infty + 10000000000000000000000000000000000000$$

Fa sempre infinito!
E non cambia nulla se utilizziamo le sottrazioni, le divisioni o le moltiplicazioni.

$$\infty - 100 = \infty$$

$$\infty \, x \, 45{,}6 = \infty$$

$$\infty : 234 = \infty$$

Complicato? Certamente ma questo è il bello della matematica.
Allenare il cervello.

Ora guardiamo questi:

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

Sono i numeri **Interi**.
Come si può notare sono i naturali con l'aggiunta dei numeri negativi.

- Perché vengono indicati con una zeta invece che con una I?

Dal tedesco *Zahl* che significa contare.
Lo so, anche a me stanno sulle scatole i tedeschi ma purtroppo in matematica sono sempre andati alla grande, non sono abili solo a imbottigliare ottima birra e a progettare auto.
Potete notare che ora abbiamo anche il meno infinito che ha la stessa potenza del più infinito:

$$-\infty - 100 = -\infty$$

- Ma se si mettono a litigare sono forti allo stesso modo o uno di loro vince?

Ottima domanda.
Beh, nessuno lo sa.

$$\infty - \infty = ma\ che\ cavolo\ ne\ so$$

Come facciamo a confrontare due pseudo-numeri che non smettono mai l'uno di crescere l'altro di decrescere?

Passiamo ai **Razionali** che indichiamo con il simbolo $\mathbb{Q}$.
Q come quoziente.
Nei razionali ci mettiamo tutti i numeri che possono essere rappresentati con frazioni:

$$\mathbb{Q} = \left\{3, -\frac{3}{5}, 0, -750, \dots\right\}$$

In poche parole, sono i numeri decimali, cioè quelli con la virgola, che hanno un numero finito di cifre dopo la virgola

$$234{,}39484747$$

e i numeri decimali periodici, cioè quelli che hanno illimitate cifre dopo la virgola ma alcune di esse da un certo punto in poi si ripetono all'infinito

$$63{,}39487777$$

In entrambi i casi esistono delle tecniche che si imparano alle scuole medie (non mi dite che eravate assenti quando l'insegnante le ha spiegate!) per trasformare questi numeri infrazioni.
Es:

$$14{,}32 = \frac{1432}{100}$$

Basta moltiplicare il numero per cento e dividerlo ancora per cento.
Perché proprio per cento? Perché ci sono due cifre dopo la virgola.
Ce ne fossero state tre avremmo utilizzato mille al posto di cento.
Se facciamo così non alteriamo il valore del numero perché lo moltiplichiamo e successivamente lo dividiamo per la stessa quantità quindi a lui, il numero, non cambia nulla.
A noi però cambia molto perché in questo modo lo possiamo scrivere come una frazione ed eventualmente semplificare la parte sopra (numeratore) con la parte sotto (denominatore) andando a pescare dei divisori comuni.

$$14{,}32 = \frac{1432}{100} = \frac{716}{50}$$

Ho semplicemente diviso per due sia il numeratore che il numeratore.
Ovviamente proseguirò finché troverò dei divisori comuni.
Avete visto che nell'insieme dei numeri razionali ho inserito anche degli interi?
Non è uno sbaglio.
Di errori, per motivi fisiologici e tecnici, di battitura o persino di calcolo, molto probabilmente alla fine del libro ne avrò compiuti diversi ma in questo caso è tutto corretto.
Infatti, un numero intero lo posso anche scrivere come una frazione:

$$14 = \frac{14}{1}$$

visto che ogni numero (tranne lo zero) diviso per 1 da come risultato sempre il numero stesso.
Perciò i razionali comprendono anche gli interi, che a loro volta includono i naturali.

Ma di quelli che poverini non si possono trasformare in frazioni ce ne freghiamo?
Assolutamente no.
Quelli sono gli **Irrazionali** e li indichiamo con la lettera $\mathbb{I}$.
I numeri irrazionali sono pertanto i decimali le cui cifre dopo la virgola sono infinite (già discusso il significato di questo termine vero?) cioè non terminano mai.
È irrazionale per esempio il notissimo *Pi greco*:

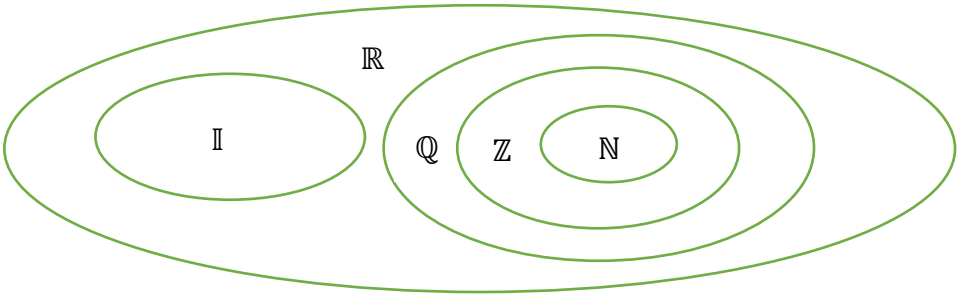
$$\pi = 3{,}14159265358\ldots$$

E già, non è solo 3,14 come ci insegnano alle elementari.
Anche questo è molto importante e altrettanto familiare, o almeno dovrebbe esserlo:

$$e = 2{,}71828182845\ldots$$

Si chiama numero di *Nepero* e lo conosce molto bene chi studia i *logaritmi* e le *funzioni esponenziali*, argomenti che spero di includere in un secondo volume.
Anche la radice quadrata di 2 ha infinite cifre dopo la virgola.

E se ora che abbiamo più dimestichezza con le varie tipologie di numeri volessimo rappresentarli con gli insiemi?
Riassumendo.
Si parte dai naturali che sono anche interi e questi ultimi sono anche razionali.
Abbiamo visto che esistono pure gli irrazionali.
Facciamo un unico pacco regalo, li mettiamo tutti assieme e otteniamo il fantastico magico gruppo dei numeri **Reali** che comprende i decimali infiniti e finiti e di conseguenza anche i razionali e i naturali.



Ci sarebbero anche i numeri **Complessi** ma per quello che è il nostro scopo credo che ne possiamo per ora fare a meno.
Aspettate che aggiungo un argomento per il secondo volume.
Fatto.

Gli intervalli

Una delle maggiori difficoltà che ho riscontrato da parte degli studenti consiste nella rappresentazione dei risultati mediante gli intervalli:

$$2 \leq x \leq 12 \Leftrightarrow boh$$

La doppia freccia si legge *se e solo se*; significa che l'ipotesi alla sua sinistra implica la tesi alla sua destra ma anche esattamente l'opposto.
Proviamo a risolvere il rompicapo con gli intervalli.
Prendiamo ad esempio

$$[1{,}10]$$

Trattasi (lo so che *trattasi* è terrificante e puzza di vecchiume tipo i libri scolastici degli anni sessanta ma ho sempre sognato di adoperarlo in un mio testo) di un intervallo chiuso il cui valore minimo è 1 e il massimo è 10.
Quindi se un numero qualunque x appartiene a tale intervallo ne deduciamo che x deve per forza essere più grande di 1 (*maggiore o uguale* a 1 dato che oltre al simbolo del minore c'è anche quello dell'uguale), che è come dire che 1 deve essere più piccolo (per correttezza si dice in questo caso *minore o uguale*) di x

$$1 \leq x$$

Ma contemporaneamente x deve essere più piccolo, minore o uguale, di 10

$$x \leq 10$$

Uniamo le due relazioni ed ecco risolto l'arcano

$$1 \leq x \leq 10$$

Difficile? No dai.
Purtroppo, non vi ho ancora raccontato il resto della storia.
Mi sono "scordato" di specificare a quale insieme di numeri mi stavo riferendo.
Tranquilli, per ciò che concerne l'interpretazione degli intervalli non cambia niente.
Però guardate questo

$$[5,20[$$

Trattasi (daje…) di un intervallo aperto; in questo caso a destra.
Significa che se un numero x appartiene a tale intervallo allora sarà per forza maggiore o uguale a 5 ma strettamente più piccolo di 20, cioè potrà essere minore ma non uguale a 20

$$5 \leq x < 20$$

Fin qui ancora tutto semplice ma ora tenevi forte perché saliamo sulle montagne russe (che in Russia si chiamano montagne americane ma non divaghiamo).
Considerato l'intervallo

$$[10,50]$$

Sapete dirmi qual è il numero più piccolo e già che ci siamo anche il più grande di questo intervallo?
Facile dai: il più piccolo è 10 e il più grande è 50.
Ma se non vi ho neppure specificato di quali numeri stiamo parlando? Sono interi o naturali? Razionali o reali?
Vi è andata bene perché con gli intervalli chiusi la risposta è la stessa.
Ma incrementiamo un pochino la difficoltà e guardiamo questo

$$[5,20[$$

Quali sono ora il numero minimo e massimo dell'intervallo?
Supponiamo che trattasi (aridaje…) di numeri interi.
Sul più piccolo non vi è dubbio; dato che l'intervallo è chiuso a sinistra il numero minore non può che essere 5.
Sul più grande non dobbiamo farci prendere dalla fretta.

Siccome l'intervallo è aperto a destra il numero 20 non è incluso in tale gruppo.
Quindi?
Quindi il numero più grande, considerato che sono tutti numeri interi, è quello immediatamente precedente al 20 cioè il 19.
Ma non siamo ancora giunti sul punto più alto del roller coaster (così chiamano negli Stati Uniti le montagne russe ma non divaghiamo).
Se considerassimo lo stesso intervallo di prima ma vi dicessi che i numeri non sono interi bensì reali?
Tenetevi forte perché il minimo è sempre 5 ma il massimo…inizia la discesa…non esiste!

- Cosa? Ma come non esiste prof! Impossibile!

Facciamo così, andate a cercare la risposta su internet.
Scherzo dai.
Dicevamo, con il numero più grande dell'intervallo

$$[5,20[$$

dei numeri reali compresi tra 5 e 20 abbiamo un problema.
Perché non possiamo fare lo stesso ragionamento di prima; cosa c'è subito prima del 20?

- Il 19 prof.

- Sbagliato!

Tra il 19 e il 20 ci sono altri numeri.
Possiamo cioè trovare ancora moltissimi numeri che sono più grandi di 19 e più piccoli di 20.
Ad esempio, 19,5.

- Ho capito prof. Il più grande è 19,99999999999

- No, nein, hayir, nej, níl, ma manco per niente.

È sufficiente aggiungere un 1 (o uno 2, un 3, un altro 9, quello che volete) al numero di prima e abbiamo ancora un numero più grande del precedente ma sempre minore di 20.

$$5 \leq 19{,}999999999991 < 20$$

- E quindi come ne usciamo?

Non ne usciamo.
È questo il bello della matematica.
Ragionare, non imparare a memoria delle formulette senza capirci una mazza e il cui unico deprimente scopo consiste solo nel prendere 6 alla verifica del giorno dopo.
Studiare matematica in quel modo non serve veramente a niente.
Invece far muovere i neuroni serve eccome!
Il numero più grande nell'intervallo appena visto non esiste!
Perché saremo sempre in grado di pescare dal mazzo un numero più piccolo di 20 e maggiore del numero minore di 20 più grande trovato fino a quel momento!
La stessa identica cosa avviene anche con intervalli microscopici.
Quanti numeri reali ci sono qui dentro?

$$[0, 0{,}00000000000000000000000001[$$

Infiniti, perché riusciremo sempre, in un qualunque istante, a recuperare un numero più piccolo di $0{,}00000000000000000001$ e maggiore del numero incluso in tale intervallo recuperato fino a quell'istante stesso.
E se vi mostrassi questo?

$$]5{,}20[$$

- Non esistono né il massimo né il minimo!

- Grande!!!

Fughiamo qualche dubbio

Domanda a bruciapelo: quanto fa 5 per 0?

Pensate che sia una domanda stupida? Allora non avete la più pallida idea di quante volte senta una risposta scorretta e di quanti errori i ragazzi, ma anche gli adulti, si trascinino dietro per tutto il percorso scolastico e oltre.
Di conseguenza certi sbagli non fanno altro che accumularsi a tanti altri provocando paure, incertezze e lacune profonde quanto crateri vulcanici.
D'altronde non crediamo che obbligare allo studio mnemonico, come ho già accennato, possa essere proficuo.
Studiare a memoria serve solo a una cosa: imparare a memoria.

"*se ho 4 monete e le voglio moltiplicare per 2 otterrò 8 monete, perché la moltiplicazione mi dice che otterrò 2 gruppi di 4 monete, che in totale sono appunto 8.*

Se invece ho 0 monete vuol dire che non ho nulla e quindi a prescindere da quante volte voglio moltiplicare quello che ho, non ho l'elemento base per ottenere il mio risultato, quindi lo posso moltiplicare anche per 3, 50, 5000 che, in fin dei conti, sempre con nulla rimarrò in mano, quindi con 0"

Amico, non si è capito una beata mazza!
Eppure, giuro che ho trovato questa e altre bestialità su diversi libri di testo scolastici!
Noi invece cerchiamo di venirne fuori tanto per cambiare sfruttando le nostre capacità logiche.
Calcoliamo

$$6 * 0 = ?$$

Con un piccolo ma determinante salto di qualità ho sostituito il simbolo della moltiplicazione, *x*, con l'asterisco.
Notazione in stile programmatore informatico che non ci farà più confondere l'operatore con la lettera *x* e si vedrà meglio del classico puntino, altro simbolo comunemente utilizzato per indicare l'operazione.
Torniamo al nostro quesito.
Tanto per cominciare ogni numero è uguale a sé stesso quindi qualunque sia il risultato possiamo con certezza stabilire che

$$6 * 0 = 6 * 0$$

Se sommiamo 0 a 0 otteniamo sempre 0; mi sembra piuttosto ovvio. Riscriviamo quindi il precedente calcolo

$$6 * (0 + 0) = 6 * 0$$

Applichiamo a sinistra dell'uguale la proprietà commutativa della moltiplicazione.

$$6 * 0 + 6 * 0 = 6 * 0$$

Ma allora se sommiamo un 6*0, che per maggior comprensione chiameremo *A*, ad un altro 6*0 che indichiamo con *B*, e otteniamo sempre un 6*0 (*A* o *B* fate voi) significa che 6*0 vale esattamente 0:

$$A + B = A \Rightarrow B = 0$$

CVD, ovvero *come volevasi dimostrare*, come dicevano ai miei tempi quei simpaticoni dei professori di matematica.

Alziamo l'asticella (ma quanto è odioso questo ritrito modo di dire?) e proviamo invece a dividere per 0:

$$\frac{9}{0} = ?$$

Se non sapete rispondere siete in buona compagnia.
Facciamo finta che faccia qualcosa, ad esempio k.
Quindi il generico numero k sarebbe la nostra soluzione

$$\frac{9}{0} = k$$

Facciamo un passo indietro e calcoliamo 6 diviso 3 che sappiamo benissimo fare 2

$$\frac{6}{3} = 2$$

Il calcolo appena visto può essere banalmente riscritto in questo modo

$$6 = 2 * 3$$

Se la relazione vale per ogni divisione allora è autorizzata anche per il nostro problema di partenza

$$\frac{9}{0} = k \Rightarrow 9 = k * 0$$

Ma non ci eravamo appena convinti che qualsiasi numero per 0 fa 0? Quindi

$$9 = k * 0 = 0$$

E no, qualcosa non torna!
O è 9 o è 0!
Il 9 non può essere contemporaneamente 0.
Quindi quel famoso k che avevamo segnalato come ipotetica soluzione non può esistere.
In poche parole, la divisione di un numero per 0 è *impossibile*!
Finalmente chiaro?
Spero di si ma se così non fosse non vi allarmate.
Basta munirsi di carta e penna e rileggere con attenzione le righe precedenti e sono sicuro che prima o poi la lampadina si accenderà e da quell'istante quel calcolo per voi non sarà più un problema.
Perché? Perché non avete studiato a memoria una formula ma ci siete arrivati col ragionamento!

Adesso ci complichiamo la vita provando a calcolare

$$\frac{0}{0} = ?$$

Ritentiamo con la tecnica del k

$$\frac{0}{0} = k$$

e ripetiamo i passaggi precedenti

$$\frac{0}{0} = k \Rightarrow 0 = k * 0$$

Ma questa volta ci siamo

$$0 = k * 0 = 0$$

Perché effettivamente 0 è uguale a 0.
Ma il problema rimane k.
Non possiamo mica dire che il risultato è un generico k, dobbiamo tirare fuori una vera soluzione cioè un numero!
Quanto vale k?
K potrebbe valere 1

$$0 * 1 = 0$$

Ci starebbe anche bene ma otteniamo la stessa risposta anche con k uguale a 2 o 3 o 2673,5…
Perché qualunque valore diamo a k, se lo moltiplichiamo per 0 da come risultato 0.
Quindi?
Quindi non è possibile *determinare* la soluzione cioè l'operazione è *indeterminata*.
Provate a chiedere in giro per verificare quante persone conoscono la differenza tra soluzione *indeterminata* e *impossibile*.
Ora voi non solo conoscete la risposta ma sapete persino come ci si arriva per logica deduttiva.
Complimenti!

Proseguiamo il brain training con un ripassino delle *potenze*.
Nei seguenti esempi reintrodurremo il punto e anche il *nulla* (cioè non useremo proprio nulla) per identificare l'operatore della moltiplicazione.

- Ma così non si fa confusione?

- Prima forse si ma adesso siete più allenati pertanto è giusto abituarsi ai diversi simbolismi che potreste trovare studiando su libri e da insegnanti diversi.

La scrittura

$$5^3$$

si legge 5 elevato alla terza, dove 5 è la base e 3 è l'esponente.
Il calcolo è presto fatto

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Il discorso vale anche per le espressioni più complesse

$$(-2x + 4)^2 = (-2x + 4)(-2x + 4)$$

Come ci si comporta con i segni?
Con le stesse regole delle moltiplicazioni:

$$+ * + = +$$
$$- * - = +$$
$$+ * - = -$$
$$- * + = -$$

Se i segni sono uguali allora il risultato sarà un + altrimenti un -.

$$(-3)^2 = (-3) * (-3) = 9$$

$$(-2)^3 = (-2) * (-2) * (-2) = 4 * (-2) = -8$$

Attenzione ad aguzzare sempre bene la vista e a non svolgere i calcoli frettolosamente

$$-(11)^2 = -(11 * 11) = -121$$

e non 121 perché il segno meno è fuori dalla parentesi perciò non subisce la moltiplicazione.
Mi raccomando, tenere sempre la guardia alta.

Ora vediamo come ci si comporta con le frazioni.
Niente di più semplice.
Basta applicare le regole appena viste, separatamente sia al numeratore che al denominatore:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

Facile.
Procediamo con altre regolette.
Che si fa se l'esponente è negativo?
Basta invertire la frazione e far diventare l'esponente positivo

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$$

Vi ricordate che un numero intero può essere rappresentato come una frazione? Ecco, è giunto il momento di sfruttare questa preziosa informazione

$$(3)^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^{-2} = \left(-\frac{9}{1}\right)^2 = 81$$

Stanchi? Se la risposta è *no* allora proseguiamo se invece è *si* allora continuiamo.

- Bella battuta prof.

Moltiplicazione di potenze: basta sviluppare le singole potenze e il gioco è fatto

$$(3)^3(3)^2 = (3 * 3 * 3) * (3 * 3) = 3 * 3 * 3 * 3 * 3$$

Ne consegue

$$(3)^3(3)^2 = 3^{3+2} = 3^5$$

Molto più fattibile di quello che vi hanno sempre fatto credere.
E non abbiamo affatto usufruito della memoria.
Per la divisione tra potenze si ragiona allo stesso modo.

$$\frac{5^3}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5$$

Dal precedente esempio ne evince la seguente regola, formula, chiamatela come vi pare ma non studiatela a memoria

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

E cosi abbiamo visto anche come passare dal particolare (esempio pratico con i numeri) al generale (formula).
Adesso le formule iniziano a causare un po' meno timore spero.
Ancora un esempio:

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

Ora comprendere la potenza di una potenza sarà senz'altro una cosa banale

$$[(2)^3]^2 = (2)^3(2)^3 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^6$$

Ovvero

$$[(a)^n]^m = a^{n*m}$$

Ma potrei anche fregarmene dell'ultima formula e fare un passo alla volta

$$[(2)^{-3}]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

Visto? Stiamo addirittura iniziando a giocarci con questa terribile e complicatissima matematica.

- Prof si può elevare a 1?

- Certamente. E il valore rimane lo stesso.

Se elevare un numero alla 2, 3, 4 significa moltiplicare un numero per se stesso 2, 3, 4 volte allora elevare un numero alla 1 significa praticamente non moltiplicarlo mai

$$5^2 = 5 * 5 \qquad 5^1 = 5$$

E con lo 0 come la mettiamo?
Beh, ve lo dico chiaro una volta per tutte.
Questo 0 ci romperà sempre le scatole.
Proviamo comunque a calcolare

$$5^0$$

Riscriviamolo in questo modo

$$5^0 = 5^{1-1}$$

Fin qui tutto chiaro.
Ora applichiamo una delle formule viste sopra e in particolare quella delle divisioni tra potenze

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

In matematica le formule possiamo sfruttarle sia da sinistra a destra che al contrario

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

Sostenere che Mario è alto quanto Paolo significa anche che Paolo è alto quanto Mario. Ovvio no?
La stessa cosa vale quindi anche per le formule.
Torniamo al nostro esempio e completiamo

$$5^0 = 5^{1-1} = \frac{5^1}{5^1} = \frac{5}{5} = 1$$

CDV!

- Quindi se troviamo un'espressione lunghissima tutta elevata alla 0 possiamo evitare di fare i calcoli e dire direttamente che fa 1?

Magari fosse così facile.
In generale risponderei di si

$$\left(3 + \frac{4}{5} + 1 + \cdots\right)^0 = 1$$

Occhio però all'esercizio cattivello.
Se infatti il calcolo dentro la parentesi viene 0 allora il risultato è

$$(0)^0 = indeterminato!!$$

Vi avevo avvisato che lo 0 ci avrebbe rotto sempre le scatole!

O ce l'hai o non ce l'hai

Prima o poi la fatidica domanda arriva.
Puoi essere simpatico quanto vuoi, fare battute esplosive, esporre con semplicità ed efficacia che non si erano mai viste.
Puoi persino divenire il loro idolo, l'archetipo del perfetto docente, ma la tua salvezza è un argomento fuori luogo, è fantapolitica, non si avvicina manco per nulla alla boa che ti salverà dall'annegamento.
Rimarrai costantemente sotto tiro.
E non credere che ci sia la purché minima irrisoria eventualità di schivare il colpo.
Uscire dieci minuti prima del suono della campanella inventando la più banale delle scuse, darsi malato, fare finta di non sentire per un'otite presa in piscina.
Niente di tutto ciò potrà servire perché presto o tardi il crine di cavallo si spezzerà sotto il peso della spada:

- Prof ma a cosa cavolo ci servirà nella vita la matematica?

Bella domanda.
Posso raccontare a F che sogna di aprire uno studio da estetista che l'aiuterà molto nel suo lavoro saper rappresentare una parabola in un sistema di assi cartesiani?
Oppure convincere G che vuole diventare meccanico, che il metodo di Ruffini sarà il suo asso nella manica?
E come persuado M, che ottiene voti eccellenti in italiano e diritto ma stenta nelle discipline scientifiche e che non vede l'ora di iscriversi a giurisprudenza, che deve assolutamente decidersi ad imparare le derivate?
Beh, cari F, G e M quelle nozioni non miglioreranno direttamente la vostra abilità nell'eseguire una manicure, nel cambiare una cinghia di trasmissione o nel discutere una sentenza ma serviranno, anzi servono, ad allenare la vostra mente come vi capiterà con altrettanta efficacia in ben poche occasioni.
Forse in nessun'altra.
La matematica è il personal trainer del vostro cervello e un cervello pronto, reattivo, capace di prendere decisioni in situazioni complesse è l'arma più potente che abbiamo per avere successo nella vita.

No F, non ti servirà a nulla sapere come si disegna una parabola mentre spalmerai una crema su un viso ma lo sforzo che hai fatto nell'apprendere e nell'applicare teoremi, nel concatenare informazioni, nell'effettuare calcoli non banali ti ha reso una persona decisamente migliore.
Difficile da capire?
Permettetemi di raccontare un aneddoto che mi riguarda e sul quale ho rimuginato per anni e anni finché non mi è apparso un lampo di luce.
Avete presente la lampadina disegnata accanto all'esclamazione *Eureka* quando Archimede Pitagorico ha una delle sue grandissime idee?
Tempo fa stavo guardando un documentario su uno dei miei idoli, il matematico ingegnere **Claude Shannon**.
Tranquilli, i miei idoli non sono solo matematici, informatici, fisici, scienziati in genere.
Maradona, Pelè, Muhammad Ali, Bruce Springsteen, Bob Dylan, Jimi Hendrix, Jim Morrison, Martin Luther King, Malcom X, Che Guevara e molti altri sono personaggi che adoro.
Allo stesso tempo però, forse per deformazione professionale, mitizzo anche diversi scienziati.
Uno di loro è appunto il grande Shannon il cui curriculum non si può certo semplificare in poche righe.
Vi invito ad informarvi ma giusto per dare un'idea vi dico soltanto che dopo le lauree in matematica ed ingegneria elettronica entrò al **MIT** dove collaborò all'invenzione di un calcolatore analogico.
E siamo solo negli anni trenta del novecento!
Successivamente si occupò di genetica e di analisi e progettazione dei sistemi digitali di elaborazione dell'informazione.
E, ripeto, siamo ancora negli anni trenta!
Durante la Seconda Guerra Mondiale lavorò a tempo pieno su progetti di interesse militare operando sui dispositivi automatici di puntamento antiaereo e i problemi connessi di riduzione del rumore.
Si occupò di crittografia lavorando al progetto di un dispositivo digitale per la segretezza delle comunicazioni telefoniche e in questo contesto conobbe un altro mio mito, l'insuperabile **Alan Turing**, il genio matematico che contribuì a sconfiggere i nazisti inventando una macchina, un vero e proprio computer, per la decodifica dei messaggi nemici.

Dopo la guerra ci fu il capolavoro, come se tutto ciò che aveva creato fino a quel momento non fosse già abbastanza.
Pubblicò il trattato scientifico che pose la base teorica per lo studio dei sistemi di codificazione e trasmissione dell'informazione.
Scordatevi gli smartphone, i tablet, i pc, la tv digitale, la musica racchiusa in file mp3, internet, i motori di ricerca, i social.
Non solo non esisteva nulla di tutto ciò ma a quei tempi non si poteva nemmeno immaginare quello che è oggi la normalità.
Ma lui aveva già ipotizzato e previsto tutto.
La sua teoria dell'informazione pose le basi per la progettazione dei sistemi informatici, partendo dalla memorizzare delle informazioni in modo da poterle trasferire e collegare tra loro.
La sua opera, i suoi trattati, i suoi studi continuarono ancora per molti anni e con estremo successo.

A casa, nel suo tempo libero, si occupava di inventare.
Inventare cosa?
Di tutto.
L'elenco è veramente troppo lungo per descriverlo in questo libro.
Voglio citare soltanto un computer che giocava a scacchi.
E già, Shannon, mentre era a casa a riposarsi si è messo a costruire un computer che giocava a scacchi quando i personal computer non si sapeva neppure cosa fossero.
Ma torniamo al punto della questione.
Alla giornalista che lo stava intervistando, durante le riprese del documentario mostrò parecchie delle sue invenzioni e tra esse ce n'era una molto particolare: un cassetto che, una volta aperto, si richiudeva da solo.
Tiravi verso di te il cassettino con la mano e un meccanismo automatico lo richiudeva dopo aver mostrato un simpatico pupazzetto.
Io ho gridato

- Fantastico!!

Sapete invece cosa ha esclamato la giornalista?
Ecco qua:

- A che serve?

Cosa? A che serve? Ma come cavolo si fa a dire "a che serve" di fronte ad un congegno del genere?
La giornalista non aveva la più pallida idea della genialità che ha portato alla realizzazione di un tale macchinario?
Evidentemente no.
Chi cavolo l'ha mandata ad intervistare uno dei più grandi, memorabili, inimitabili scienziati di tutta la storia dell'umanità se questa di scienza non ci capiva evidentemente una beata mazza?
Ma la cosa più bella è stata la risposta di Shannon al "a che serve" della signora:

- O ce l'hai o non ce l'hai!

Capito?
O ce l'hai o non ce l'hai.
E se non ce l'hai inutile ogni tentativo di spiegazione.
In quel momento si accese anche la mia sopracitata lampadina.
Quando ero un bambino mi divertivo a progettare strani circuiti elettrici.
State nuovamente tranquilli.
Ero un bimbo perfettamente normale che amava giocare a pallone, andare in bici, lanciare gavettoni giù dal terrazzo a ignari passanti.
Ma provavo soddisfazione anche nella scienza e nella tecnologia.
Così mi dilettavo a costruire circuiti casarecci.
Un giorno era presente a casa una vecchia amica dei miei che, manco a dirlo, si guadagnava il pane come professoressa d'italiano.
Tirai fuori da un armadio questo quadrato di compensato sul quale avevo installato lampadine, transistor, relè, interruttori e le mostrai il funzionamento di cui andavo molto orgoglioso.
La simpaticona mi guardò con sguardo ebete e disse:

- A che serve?

Avrei voluto risponderle che il suo cervellino microscopico da insegnante fallita non le permetteva di andare oltre ai suoi banali compiti quotidiani ma ero troppo piccolo e mi limitai a rimanerci male mandandola a quel paese a denti stretti.
Ora invece saprei anch'io cosa rispondere:

O ce l’hai o non ce l’hai!

Semplice, diretto, efficace.
A cosa serve la matematica?
Studiatela e vedrete che migliorerete in tutto quello che fate non solo a scuola ma nella vita.
Non ci credete?
Beh, allora non ce l’avete.

Eratostene

Eratostene di Cirene, un altro mio idolo.
Nasce nel 267 a.C. (anno più anno meno) a Cirene e ci lascia ad Alessandria d'Egitto nel 194 a.C. (anno più anno meno).
Anno più anno meno perché è tutt'altro che semplice stabilire date precise riferendosi a quelle epoche così lontane.
Pensate che della data di nascita di **Diofanto di Alessandria**, un altro illustrissimo matematico che rincontreremo più avanti, non si conosce con esattezza neppure il secolo.
Ma cosa ha combinato il nostro Eratostene nell'arco della sua vita?
È stato, riassumendo, un matematico, un astronomo, un geografo, un poeta, un filologo e un filosofo.
Direi che non ha perso tempo a pettinare le quaglie.
Siccome stiamo discutendo di matematica, vorrei spiegarvi giusto due cosine che ci faranno comodo per acuire la nostra padronanza della materia.

Il Crivello

Il notissimo **Crivello di Eratostene** è un procedimento molto efficace per individuare i numeri primi.
Intanto però vediamo cosa sono questi numeri primi.
Un numero primo è un numero naturale che è divisibile solo per se stesso o per 1, chiarendo che con divisibile vogliamo specificare che la divisione non deve dare resto diverso da 0.
Attenzione alla sottigliezza della parola divisibile.
Ricordo la scena di un film il cui protagonista è un bambino prodigio.
La maestra dopo aver scribacchiato una serie di numeri alla lavagna pone agli alunni una domanda simile a questa (non rammento con esattezza ma il senso non cambia):

"Quali di questi numeri si possono dividere per 2?"

Il piccolo genio senza nemmeno alzare lo sguardo risponde "Tutti!".
La prima volta che vidi il film mi piegai dalle risate.
Il bimbo aveva pienamente ragione perché chi mi vieta di prendere un numero qualunque e dividerlo per 2?
Ma il termine divisibile, la maestra avrebbe dovuto domandare non quali numeri si potevano dividere per 2 bensì quali fossero divisibili per 2, ha un significato preciso: prendo un numero *A*, lo divido per

un altro numero *B* e se il resto della divisione è 0 allora *A* è divisibile per *B* ovvero, *B* è un divisore di *A*, ovvero, *A* è un multiplo di *B*.
Ora che ci siamo chiariti studiamo il Crivello.
Scriviamo una serie di numeri naturali partendo dal 2 (il numero 1 non ci interessa dato che sappiamo già che è divisibile solo per se stesso):

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37……

Adesso sottolineiamo il 2 ed eliminiamo (o evidenziamo, cerchiamo, coloriamo, fate come vi pare) i multipli di 2:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37,…

Ripetiamo la tecnica col 3:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37,…

Col 5 (col 4 no perché è un multiplo di 2 e infatti è già stato fatto fuori dal crivello killer):

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,…

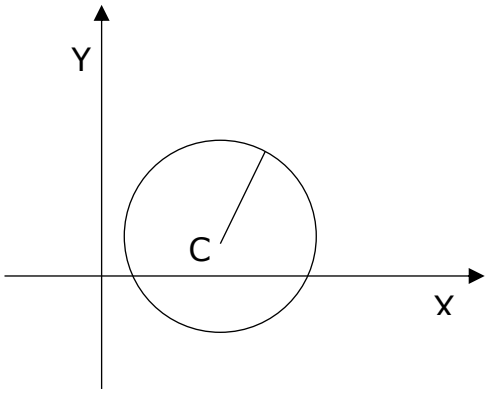
E così via:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,…

I superstiti sono tutti numeri primi.

Misura del raggio della Terra

Ci sono terrapiattisti in giro?
Spero di no anche perché un terrapiattista interessato alla matematica è una contraddizione in termini.
Partiamo da un paio di considerazioni.
Sapendo che la forma della terra è sferica (più o meno), come risaputo già ai tempi di Eratostene, possiamo disegnarne una proiezione a 2 dimensioni su un foglio e il risultato è una circonferenza:



Chiedo scusa per la rozzezza del disegno ma prima di scompisciarvi dalle risate provate voi a disegnare figure geometriche con un editor di testo.
La freccia orizzontale è l'asse delle ascisse e la identifichiamo con *X*, la freccia verticale è l'asse delle ordinate e la chiamiamo asse *Y*.
Il punto al centro del cerchio indovinate come si chiama: centro della circonferenza.
In una circonferenza i punti che si trovano sulla linea hanno tutti la stessa distanza dal centro.

- Scusi prof, ma lei ci sta fregando. Questa è una lezione di geometria!

Sgamato!
Che vergogna, sfruttare il grande Eratostene per spiegare la geometria.

- Ebbene sì, vi ho fregato!

O almeno ci stavo provando.
Divaghiamo.

Anni fa insegnavo in una terribile seconda superiore dove chi mi aveva preceduto suggeriva caldamente di entrare in classe equipaggiato con un'armatura stile legionari dell'impero romano.
Effettivamente l'esordio non lo posso menzionare tra i più gratificanti della mia esperienza da prof.

Risolvemmo comunque in tempo record, come spesso mi è riuscito, i problemi relativi al rapporto tra il sottoscritto e gli studenti, che diventò presto amichevole.
Da nemico giurato divenni il grande prof simpatico, disponibile e sempre pronto ad ascoltare.
Rimaneva però un grave problema: questi ragazzi detestavano la matematica e ad eccezione di 4 o 5 di essi, il rifiuto per la materia era pressoché totale.
Faceva molto piacere essere considerato positivamente dai miei ragazzi ma rubare lo stipendio non è mai stato un mio punto di arrivo.
Eppure, non era la prima volta che mi trovavo di fronte a delle muraglie tipo Vallo di Adriano e bene o male ero sempre riuscito ad escogitare qualcosa per far sì che tutti o quasi raggiungessero per lo meno un livello di conoscenza più che sufficiente (senza chiaramente trascurare gli studenti che avevano veramente voglia di imparare).
Con questi scalmanati invece, sempre escludendo quei 4 o 5, non c'era nulla da fare.
Un bel giorno però mi si accese la famosa lampadina ed escogitai il diabolico espediente che ancora oggi chi tra loro mi incontra per strada, mi menziona con riconoscenza.

- Nella prossima verifica…

- No dai prof, niente verifica.

- Fatemi finire. Nella prossima verifica inserirò solo esercizi delle pagine 334, 335 e 336. Iniziamo a farne qualcuno insieme.

- Cosa prof? Ci sta dicendo già quali esercizi metterà nella verifica?

- Certamente.

- Perché?

- Bip miei.

- Grande prof.

Grande prof davvero!
Sapete cosa successe? Che in quella classe si esercitarono per 10 giorni come se si stessero preparando al test per entrare alla Normale di Pisa.
Si presentarono alla verifica talmente preparati che non ricordo di aver dato un'insufficienza neppure a coloro che fino a quel momento offrivano da bere se prendevano un 4 e mezzo.
Qualche collega, com'era prevedibile, storse il naso.

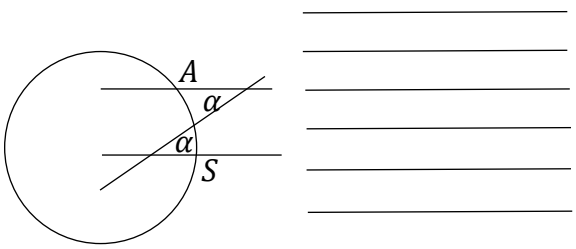
- Non è così che si insegna!

Idioti!
Il ruolo del docente non è far di tutto affinché i discenti imparino?
E in quei 10 memorabili giorni quando i ragazzi si riunivano in gruppi nelle loro camerette, nei bar, al parco, per studiare, esercitarsi, farsi spiegare da chi aveva capito meglio per poi chiedermi ulteriori delucidazioni in classe, non sono forse riuscito a farli finalmente acquisire quelle competenze che avevano rigettato fino a poco tempo prima?

E ora torniamo al nostro Eratostene.
Se avessi intitolato il presente capitolo con qualcosa tipo *Basi di Geometria* avrei perso almeno la metà dei lettori soprattutto considerato il fatto che avevamo già affrontato lo studio di alcune basi di matematica.
Invece vi ho attratto con la curiosità.
Capire come Eratostene ha risolto il dilemma del calcolo del raggio terrestre ci servirà per imparare alcuni elementi di geometria che altrimenti sarebbero troppo pallosi se visti singolarmente.
È chiaro che le nozioni che apprenderemo sono solo una microscopica fetta di quello che andrebbe, anzi deve essere, studiato ma come già detto, questo non è un libro scolastico ma un testo utile per, spero, procurarsi importanti nozioni basilari e, possibilmente, far cessare lo spavento e l'orrore per la materia, magari facendo anche venire voglia di approfondirla.
Detto ciò, continuiamo.
Eratostene sapeva che a Siene, una città dell'antico Egitto, a mezzogiorno in punto del solstizio d'estate (21 Giugno), il Sole era

ben piazzato sullo Zenit, cioè in posizione verticale rispetto all'osservatore.
Ad Alessandria invece questo non succedeva perché alla stessa ora nello stesso giorno si vedevano le ombre proiettate sul terreno.
Il grande matematico sapeva anche che le due città si trovavano sullo stesso meridiano.
Bastavano come informazioni per procedere ai calcoli considerato che stiamo parlando di oltre 2000 anni fa e non solo non erano ancora stati inventati computer, calcolatrici, satelliti ma incredibilmente nemmeno internet?
No, vostro onore, con queste poche news facciamo poca strada.
Serviva anche conoscere la distanza tra le due città.
Fatto: tale percorso veniva stimato con la misura di 5000 stadi (uno stadio era poco meno di 160 metri).
Finito?
No.
Eratostene assunse che i raggi del Sole, data la distanza di quest'ultimo dalla Terra, giungessero a destinazione praticamente paralleli: fatto.
Finito?
No.
Occorreva la padronanza di un po' di nozioni geometriche, che vedremo a breve, ma ovviamente Eratostene aveva sempre fatto i compiti a casa e quando andavano alle udienze scolastiche i suoi genitori tornavano sempre soddisfatti: fatto.
Finito?
No.
Il giorno delle osservazioni e delle misure non sarebbe dovuto piovere e nemmeno essere nuvoloso ma per fortuna l'episodio narrato non si svolse in Irlanda: fatto.
Pertanto, durante un solstizio d'estate a mezzodì spaccato Eratostene fece piantare verticalmente per terra ad Alessandria uno gnomone, che non è uno degli amici di Biancaneve dopo anni di palestra bensì un bastone, e si presero le misure della sua ombra.

$raggi\ solari\ paralleli$



Sono perfettamente d'accordo che il disegno faccia ribrezzo ma con un po' di fantasia ci si arriva.
Lo gnomone viene piantato ad Alessandria indicata con A, mentre con S individuiamo Siene.
Ricordiamo ancora una volta che all'epoca di cui stiamo parlando la conoscenza nonché la misurazione degli angoli erano padroneggiate alla grande.
Venivano persino usati degli strumenti avanguardistici.
Per chi volesse approfondire l'argomento (goniometria e trigonometria in particolare) diciamo che nota l'altezza *g* dello gnomone e misurata la lunghezza *l* dell'ombra, l'angolo si determina in questo modo:

$$\alpha = arcotangente\left(\frac{g}{l}\right)$$

L'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria risultò essere 1/50 di angolo giro (un angolo giro è 360 gradi).
A questo punto introduciamo altri 3 fondamentali teoremi geometrici:

1) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali.

2) Gli archi di circonferenza sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.

3) La misura di una circonferenza noto il raggio *r* è $2\pi r$

Per quanto riguarda il primo punto diciamo che le rette parallele sono i raggi solari, data la distanza del Sole dalla Terra, mentre la trasversale è il prolungamento dello gnomone piantato verticalmente sul terreno, fino al centro della circonferenza (rappresentante lo stesso meridiano su cui si trovano Alessandria e Siene).
Per questo ho indicato i due angoli con lo stesso simbolo.
Il secondo punto ci permette di calcolare la circonferenza della Terra dato che conosciamo la misura dell'arco che congiunge *A* e *S*: è la distanza tra le due città.
Quindi calcoliamo la circonferenza *c* della Terra con una proporzione:

$$c : 5000\ stadi = 360\ gradi :\ angolo\ \alpha$$

Quindi

$$c : 5000 = 360 :\ 360\ \frac{1}{50}$$

Cioè

$$c = \frac{5000 * 360}{7{,}2} = 250000\ stadi$$

Trasformiamo in metri (uno stadio è circa 157,5 metri)

$$c = 39375000$$

Così sappiamo quant'è lunga la Terra.
Per il raggio basta sfruttare il punto 3:

$$c = 2\pi r \implies r = \frac{c}{2\pi} = \frac{39375000}{6{,}28} = 6269904{,}45$$

Misura vicinissima a quella reale effettuata però con le moderne strumentazioni!
Dite la verità: non è poi così inutile e noiosa la geometria.

Prodotti notevoli, la strada a doppio senso di marcia

Le formule

Studiate la seguente formula a memoria:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$$

Fatto? Ora studiate questa:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab + b^2$$

Poi questa:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ecc, ecc, ecc.
Chiaramente sto scherzando ma non crediate che qualche insegnante non lo chieda davvero.
Lasciamo perdere la memoria e fabbrichiamo da soli le formule di questi benedetti *prodotti notevoli* che causano ancora troppi brutti voti.
Prendiamone uno a caso:

$$(a-b)^2$$

Ma veramente l'unica scelta che abbiamo per imparare questa formuletta è comportarci come quando la prof d'italiano ci dovrà interrogare su *Il Cinque Maggio* di Manzoni?

Ei fu. Siccome immobile,
Dato il mortal sospiro,
Stette la spoglia immemore
Orba di tanto spiro,
Così percossa, attonita
La terra al nunzio sta,…

Ci siamo? Non ancora? Allora ripetiamo.

Ei fu. Siccome immobile,
Dato il mortal sospiro,
Stette la spoglia immemore
Orba di tanto spiro,
Così percossa, attonita
La terra al nunzio sta,…

Assimilata la prima parte? Possiamo andare avanti o dobbiamo ancora ripetercela mentalmente?
No, ragazzi non ci siamo.
Come ho già spiegato, con lo studio mnemonico otteniamo solo un risultato: imparare a memoria.
Stop, fine, the end.
Lungi dal sottoscritto criticare l'efficienza delle sperimentatissime tecniche di alcuni insegnanti di lettere ma in matematica (e secondo me nemmeno nelle altre discipline) questo procedimento non è proficuo.
Ovvio che se stiamo discutendo di argomenti per le scuole secondarie superiori non ci sarà la possibilità di spiegare qualunque teorema o formula a causa della loro complessità eccessiva.
Chi avrà voglia di approfondire perché appassionato e portato per la materia scientifica si potrà esaustivamente gratificare all'università.
Anche nell'orbita scolastica in ogni modo, quando c'è l'occasione per evitare l'inutile ripetizione a pappagallo optando per una decisamente più efficace spremitura di meningi, sfruttiamo tale chance.
Pertanto, non tentiamo nemmeno di acquisire queste formule pappagallescamente, tanto non servirà a niente.
Il tempo di un'eventuale interrogazione o prova scritta e *adiós*, sarà tutto raschiato dal pensiero.
Elimina, svuota cestino e bye bye formuletta.
Ma un bel giorno la signora matematica ci chiederà il conto e ci troveremo nella situazione di dover usare certe formule ma non riusciremo a ricordarle.
Quindi impariamo a costruircele, in modo non solo da poterne usufruire per sempre ma anche per proseguire con l'allenamento del nostro cervello.
Torniamo a

$$(a-b)^2$$

Sappiamo cosa significa elevare al quadrato.
Un numero al quadrato è un numero moltiplicato per sé stesso.
Allora chi ci vieta di fare la stessa cosa con una parentesi?

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

E ora?
Ora prendiamo ogni singolo elemento della prima parentesi e moltiplichiamolo con ciascun elemento della seconda.

$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$$

Ci sono due elementi identici, *ab*, con lo stesso segno quindi li sommiamo ricordando che se davanti alle lettere non c'è niente è come se ci fosse un 1 (es: *a=1a*) e manteniamo il segno comune.

$$-ab - ab = -1ab - 1ab = -2ab$$

Se invece avessero avuto segno opposto avrei dovuto effettuare una sottrazione e mantenere il segno del numero in valore assoluto (cioè senza segno) più grande. Es:

$$3a - 2a = a$$

$$3a - 5a = -2a$$

Vediamo quindi il calcolo completo ed abbiamo la nostra formuletta ricavata col ragionamento invece che con la memoria:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Se non credete che il nostro metodo funzioni proviamo con qualcosa di ancor più complesso:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$

Le prime due parentesi sono un quadrato, lo abbiamo appena imparato.

$$(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

Come abbiamo già capito dalla formula precedente, moltiplichiamo ogni elemento della prima parentesi con ogni singolo elemento della seconda.

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

Completiamo con gli ultimi calcoli e abbiamo la nostra formula:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

CVD come dicono i boomer.

Ora provate con altri prodotti notevoli e verificate la potenza della costruzione autonoma delle formule

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b+c)^2$$

Inversione a U

A parte prendere un bel 6 e magari anche un 7, qual è l'utilità effettiva dei prodotti notevoli?
Consideriamo ad esempio l'equazione

$$\frac{(x^2-1)}{x^2+2x+1} = 5$$

Ho scritto un'equazione a caso inventata al momento ma il discorso che stiamo per affrontare vale per le espressioni, le disequazioni e per una moltitudine di altre situazioni che si presentano in tutto il percorso di studio quinquennale della scuola superiore e oltre.

Senza divagare troppo, dato lo scopo del presente libro, esponendo argomenti che forse affronterò in un prossimo volume, il primo passo per lo svolgimento di una simile equazione è la *scomposizione* cioè la riduzione di espressioni complesse in minimi termini al fine di semplificare l'espressione stessa per ottenere il risultato voluto.
Mi spiego meglio.
Abbiamo visto dallo studio dei prodotti notevoli che

$$(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2)$$

Ma noi sappiamo dalla vita di tutti i giorni che sostenere che Paolo è alto quanto Gianni significa anche che Gianni è alto quanto Paolo giusto?
Ne avevamo del resto già discusso.
E allora perché non invertire il senso di marcia anche con le formule?

$$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$$

In pratica usiamo le formule dei prodotti notevoli al contrario, un po' come se dal risultato di un esercizio ne ricavassimo il testo.
Quindi l'equazione sopra la possiamo riscrivere

$$\frac{(x^2-1)}{x^2+2x+1} = 5 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = 5$$

E di conseguenza semplificare

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} = 5$$

Per poi procedere col resto dei calcoli.
Visto quindi come manipoliamo le formule?
Ce le costruiamo in autonomia e le sfruttiamo in entrambi i sensi dell'uguale.
La matematica ragionata è più utile e spero anche meno noiosa della matematica studiata a memoria.

Probabilità

Saette o lotterie?

No, non discuteremo ne calcoleremo l'eventualità di essere colpiti da un fulmine.
La questione è trita e ritrita, basta effettuare una semplice ricerca in rete.
Il problema è che se vi interessa una risposta semplice come un numero tipo *il rischio di essere beccato in pieno da un fulmine è dello 0,0252%*, molto probabilmente, giustappunto, tale risposta avrà poco senso.
Il calcolo riguarda un tizio mentre è sdraiato in spiaggia o un alpinista sulla vetta del Monte Bianco?
Ci riferiamo ad un singolo istante o ad un arco temporale più lungo?
E del luogo ne vogliamo tenere conto?
Rischia in maggior misura un soggetto che sta pescando nel Golfo di Maracaibo, luogo detentore del record per la caduta di fulmini in un anno, con una canna da pesca rivolta verso l'alto e una vistosa medaglietta di metallo al collo o il sottoscritto mentre passeggia col cane?
Premetto che io il cane non ce l'ho quindi vince decisamente il pescatore.
Siamo d'accordo quindi che tale computo ha poco senso.
Noi siamo matematici non filosofi pertanto siamo per natura più rigorosi.
Vi racconto una storiella di cui amava parlare spesso il mio amico P, il più grande matematico e genio che abbia avuto la fortuna di conoscere personalmente.
La modifico leggermente senza alterarne il senso.
Un fisico, un filosofo e un matematico sono seduti su un pullman che sta viaggiando in una splendida isoletta del nord Europa.
Ad un certo punto si vede una macchia nera: è una pecora posizionata di lato nell'atto di pasteggiare con della fresca erbetta.
Il frettoloso filosofo sentenzia:

"In quest'isola le pecore sono nere!"

Il pignolo fisico, giustamente, lo rimprovera:

"Ma di che cavolo stai blaterando? Hai visto solo una pecora, come puoi sostenere che siano tutte nere? L'unica certezza che hai è che in quest'isola c'è una pecora nera!"

Il rigoroso matematico, ahimè, non è soddisfatto nemmeno dell'affermazione del fisico e ribatte:

" Purtroppo, caro amico sei anche tu in errore. L'unica affermazione veramente corretta, con i dati che abbiamo fino a questo istante, è che in quest'isola esiste almeno una pecora che ha almeno un lato nero!"

Capito la diversità tra la matematica e le altre discipline?
Quindi la domanda secca "*qual è la probabilità di essere colpiti da un fulmine?"* senza altre importanti indicazioni, per un matematico ha poco significato e tanto meno ha senso l'asserzione "*è più probabile essere colpiti da un fulmine che vincere al superenalotto*" usata troppo spesso per spacciarsi per dotti scienziati.
Anche perché la seconda la possiamo calcolare e come lo vedremo a breve.

Ma torniamo al tema del momento.
La formula per calcolare la probabilità di un dato evento è molto semplice:

$$p = \frac{CF}{CP}$$

Con *CF* indichiamo i casi favorevoli al verificarsi dell'evento mentre con *CP* indichiamo tutti i possibili casi.
Chiariamo con un esempio.
Inseriamo in una zuppiera diverse palline colorate.
Per non alterare il risultato le palline devono differire solo per il colore ma avere identiche dimensioni e lo stesso peso.
Supponiamo che siano in tutto 20 così distribuite:

10 di colore giallo
8 di colore verde
2 di colore rosso

Se scommettessi con un mio amico che infilando, senza guardare, la mano nella zuppiera tirerei fuori una bella biglia rossa allora l'evento scritto in termini più matematici sarebbe: estrazione di una pallina rossa da una zuppiera contenente ecc., ecc.
In questo caso per guadagnarmi la vincita ho 2 possibilità, casi favorevoli, perché le palline del colore vincente sono 2.
I casi possibili sono invece 20, numero che corrisponde al totale delle palline.
La probabilità di mettere in saccoccia l'euro della scommessa (sapete com'è, dalle mie parti abbiamo il braccino corto) è:

$$p = \frac{CF}{CP} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

Non vi piace perché non vedete il simbolo del percentuale?
Basta completare la divisione e moltiplicare per 100:

$$p = \frac{CF}{CP} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \implies p = 0{,}1 * 100 = 10\%$$

Se invece di palline ne estraessi 2 alla volta e volessi calcolare la probabilità che siano entrambe rosse?
In questo caso ho un solo caso favorevole ma per i casi possibili dobbiamo ragionarci sopra un po'.
Infatti, per calcolare le possibili *combinazioni*, ricordate questo termine, di coppie di palline estratte da quella zuppiera dobbiamo pensare che ogni pallina può essere accoppiata con qualunque altra.
Prendiamo ad esempio una pallina gialla e chiamiamola *G1*.
Già che si siamo associamo dei nomi a tutte le rimanenti palline.
Le possibili combinazioni sono:

G1G2 - G1G3 - G1G4 - G1G5 - G1G6 - G1G7 - G1G8 – G1G9 – G1G10 - G2G3 - G2G4 - G2G5 - G2G6 - G2G7 - G2G8 – G2G9 – G2G10 - G3G4 - G3G5 - G3G6 - G3G7 - G3G8 - G3G9 – G3G10 - G4G5 - G4G6 – G4G7 – G4G8 – G4G9 – G4G10 – G5G6 – G5G7 – G5G8 – G5G9 – G5G10 – G6G7 – G6G8 – G6G9 – G6G10 – G7G8 – G7G9 – G7G10 – G8G9 – G8G10 – G9G10.

Finito? No, abbiamo solo accoppiato le gialle.
Ora dobbiamo abbinare ogni gialla con ogni verde.

G1V1 - G1V2 - G1V3 - G1V4 - G1V5 - G1V6 - G1V7 - G1V8 – G2V1 – G2V2 – G2V3 – G2V4 – G2V5 – G2V6 – G2V7 – G2V8 - ….

Finito? No perché dobbiamo ancora abbinare le gialle con le rosse, le verdi con le rosse, le rosse tra di loro, le verdi tra di loro.
Ok con un po' di pazienza si può fare ma se invece di avere 20 palline e 3 colori nella zuppiera ci fossero 67383 palline e 14 colori?
Altro che pazienza ci vorrebbe!
Per fortuna c'è un'utilissima formula che è quella delle *Combinazioni* (il termine che vi avevo chiesto di mettere da parte):

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

La formula calcola le *combinazioni* di *n* elementi presi a gruppi di *k* alla volta.
Il punto esclamativo in matematica è il simbolo del *fattoriale*.
Il fattoriale di un numero è dato da una serie di moltiplicazioni ottenute partendo dal numero stesso e via via diminuendo tale numero di 1 fino ad arrivare proprio a 1.
Ad esempio, il fattoriale del numero 5 si calcola in questo modo:

$$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$$

Il fattoriale si può calcolare solo sui numeri naturali e, udite udite, il fattoriale di 0 è 1.
Non mi credete?
Allora, abbiamo appena visto che la formula delle combinazioni mi da il numero dei gruppi che posso comporre prendendo *n* elementi a gruppi di *k*.
Ma quanti gruppi posso formare con *n* elementi prendendoli tutti assieme in una sola volta? Chiaramente, posso formare un solo gruppo.
Quindi

$$C_{n,n} = 1$$

Eseguiamo però il calcolo sviluppando la formula.

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{1}{0!}$$

Uniamo gli ingredienti

$$\frac{1}{0!} = 1 \Rightarrow 0! = 1$$

Ora che ci siamo chiariti e spero rilassati grazie alla presenza della formula delle combinazioni torniamo al nostro quesito.
I casi favorevoli sono 1 perché posso formare un solo gruppo composto da 2 biglie rosse mentre i casi possibili sono:

$$C_{20,2} = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20!}{2!\,18!}$$

Non rovistate nel cassetto per cercare la calcolatrice!
Non abbiamo bisogno di calcolare i fattoriali di 20 e 18.
Basta sviluppare la formula e semplificare ogni numero del numeratore col suo identico nel denominatore:

$$C_{20,2} = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 * 19 * 18 * 17 \ldots . * 1}{2! * 18 * 17 * \ldots 1} = \frac{20 * 19}{2} = 190$$

Quindi la probabilità di vittoria è:

$$p = \frac{1}{190}$$

Forse più bassa di quella del pescatore di essere colpito da un fulmine.

Adesso sfruttiamo la formula per verificare se vale la pena tentare la fortuna al superenalotto che, al momento della stesura del presente libro, superava i 300000000 di euro!
Visto che bisogna giocare responsabilmente ci facciamo bastare una colonna, cioè un gruppo di 6 numeri differenti compresi tra 1 e 90.

Le possibili sestine, casi possibili, sono tutte le combinazioni di 90 numeri presi a gruppi di 6:

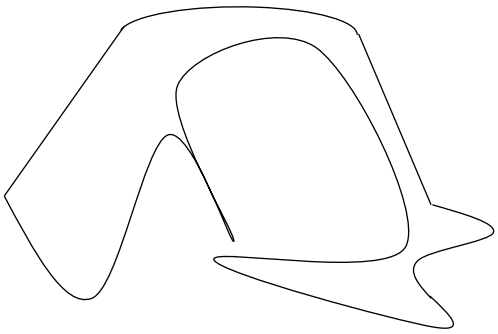
$$C_{90,6} = \frac{90!}{6!\,(90-6)!} = \frac{90!}{6!\,84!} = \frac{90 * 89 * 88 * 87 * 85}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1} = 622614630$$

Divertitevi ora a calcolare la probabilità di vincere al superenalotto giocando una sestina, dividendo i casi favorevoli, 1, con quelli possibili, 622614630.

Auguri!

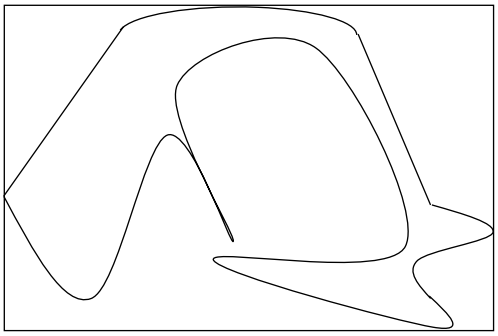
Probabilità creativa

Cari amici trovatemi, anche approssimativamente ci mancherebbe, l'area di questa figura:



Allora, com'è che era?
Base per altezza diviso 2, no quella è per il triangolo.
Allora proviamo raggio per raggio per 3,14.
No, non funziona.
Houston abbiamo un problema!
Non esiste formula per quella figura.
Anzi, non è neppure una figura nota!
Come facciamo a calcolarne l'area?
Usiamo la creatività.

Venite a casa mia, aspettate che la rompiscatole maleducata del piano di sopra annaffi i suoi tristi fiorellini di plastica e posizionate il disegno sotto le sue finestre.
Magari prima contorniamo la figura con un rettangolo.



Dopodiché contiamo le gocce d'acqua cadute all'interno del rettangolo e, tra queste, quelle che sono cadute anche dentro la figura.
Bene, se supponiamo che la caduta delle gocce d'acqua sia casuale, ovvero che non si possa influenzare in alcun modo il punto in cui le gocce possano piovere, allora con una proporzione potremmo approssimativamente determinare l'area del della figura:

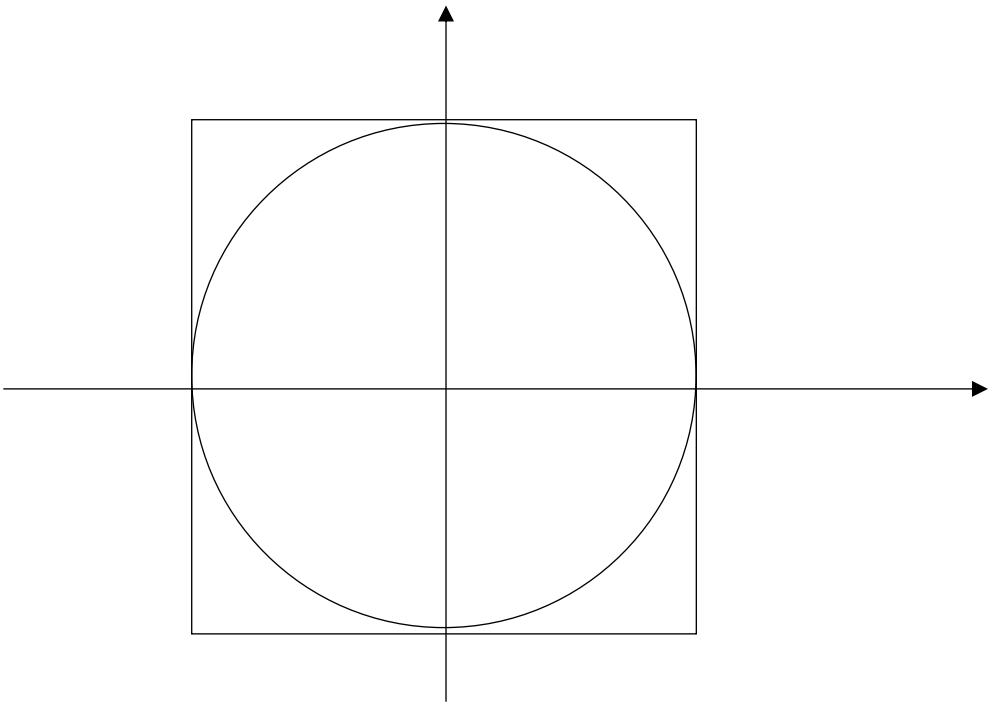
area rettangolo : area figura = numero gocce totali : numero gocce interne alla figura

La superfice del rettangolo è facilmente calcolabile grazie alla formula *base per altezza*.
Quindi, aggiungendo un po' di sano simbolismo:

$$AF = \frac{ARett * NGInt}{NGTot}$$

Chiaramente, per avere un minore errore di approssimazione potremmo suddividere la strana figura in parti minuscole in modo da contornarla con rettangolini più piccoli che creano meno divario o

con altre figure geometriche note di cui si conoscano le formule per il calcolo dell'area.
La misura dell'area sarà quindi costituita dalla somma di tutte le misure più piccole.
Abbiamo usato la casualità per effettuare un calcolo matematico!
Sapete che queste tecniche vengono utilizzate per una miriade di scopi?
Ovviamente non si usano le gocce ma i numeri casuali.
Si può usare questa tecnica addirittura per calcolare il valore di *pigreco.*
Disegniamo una circonferenza di raggio 1



L’area del cerchio è:

$$A = r * r * \pi = 1 * 1 * \pi = \pi$$

Se la misura del raggio è 1 allora quella del lato del quadrato che lo contorna è 2.
Pertanto, conosciamo anche l’area del quadrato: 2*2=4.
Per semplificarci la vita possiamo anche riferirci solo al settore del cerchio del primo quadrante, quello in alto a destra.
A questi punti generiamo tanti numeri casuali, numeri generati da una formula matematica, che stiano all’interno del quadratino del primo quadrante.
Basta che siano numeri reali compresi tra 0 e 1 (il lato del quadratino).
Tra tutti i numeri saltati fuori, calcoliamo quanti stanno anche dentro il settore del cerchio.
Basta che la distanza tra tali numeri e il centro della figura sia minore del raggio, cioè di 1.
Con una proporzione identica all’esempio precedente, calcoliamo per approssimazione l’area del settore circolare che è un quarto di *pigreco*.
Bello vero?

Per gli appassionati di programmazione lascio un breve algoritmo in linguaggio C++ in modo che possiate verificare che il tutto si incastra a perfezione.
La casualità usata in geometria.
Chi l’avrebbe mai detto.

```
#include<iostream>

#include<ctime>

#include<cstdlib>

#include<cmath>

//genero una serie di coppie di numeri pseudocasuali

//compresi nel quadrato di lato 1 e valuto quante
```

```
//di esse appartengono al quarto di circonferenza di raggio 1
//il valore di pi-greco viene calcolato con una proporzione
int main()
{
	using namespace std;
	double x,y,pi;
	int n,tot_q=0,tot_c=0;
	//inizializzo il generatore di numeri pseudocasuali
	srand(time(NULL));
	cout<<"quanti numeri pseudocasuali vuoi generare?: ";
	cin>>n;
	for(int i=0;i<n;i++)
	{
		x=(double)rand()/RAND_MAX;
		y=(double)rand()/RAND_MAX;
		tot_q++;
		//valuto se il punto è compreso nel quarto di cerchio
		if(sqrt(x*x+y*y)<=1) tot_c++;
	}
	//calcolo e stampo il valore di pi_greco con la proporzione
	// 1/4 pi : tot_c = 1 : tot_q
```

```
        // 1/4pi*tot_q=tot_c  =>  1/4pi=totc/totq  =>  pi=4*totc/totq

        pi=((double)tot_c/tot_q)*4;

        cout<<"\npi_greco: "<<pi;

        return 0;

}
```

La legge dei grandi numeri, beata ignoranza.

Quante volte vi è capitato di sentire, magari persino al telegiornale, che per la notissima a chiunque legge dei grandi numeri, il Milan dovrà per forza vincere alla partita successiva oppure che siete invitati a giocarvi il 25 sulla ruota di Bari perché vincerete con molta probabilità?
Non mi dite che ci siete cascati.
Ma secondo voi se ad esempio il numero 27 del superenalotto non esce da 12 settimane perché cavolo dovrebbe avere più probabilità di saltare fuori rispetto al 78 che è apparso ierlaltro?
Vi è piaciuta ierlaltro?
Beh, caro/a saputello/a che ci delizi con informazioni di cui non sai nulla, hai appena fatto una figura di cacca.
Secondo voi c'è un chip nascosto in ogni pallina che dopo aver fatto mostruosi calcoli matematici la fa passare avanti alle altre?
Sembra un discorso da complottista – terrapiattista.
Uno di quelli che teme i chip senza neanche sapere cosa siano.
Però visto che abbiamo introdotto l'argomento vi enuncio velocemente la *LDGN*, detto in stile USA.
Velocemente perché per poterla comprendere occorre la padronanza di una montagna di prerequisiti matematici piuttosto avanzati.
Praticamente bisogna aver dato almeno gli esami *Analisi 1*, *Analisi 2* e *Calcolo delle Probabilità* e certamente non in una di quelle Università, statali o private, ad uso esclusivo di cazzeggiatori professionisti.
La LDGN descrive il comportamento della media di una sequenza di prove di una *variabile casuale* (ma noi non sappiamo cosa sia una variabile casuale), indipendenti e caratterizzate dalla stessa *distribuzione di probabilità* (ma noi non sappiamo cosa sia

una distribuzione di probabilità) al *tendere all'infinito* (noi sapremo più in là cosa significhi tendere all'infinito ma in questo contesto non ci servirà a niente perché ne sapremo ancora troppo poco) della numerosità della sequenza stessa.
In formule:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1$$

Dove $\overline{X_n}$ è la media campionaria di *n* variabili casuali $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tutte con media μ

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

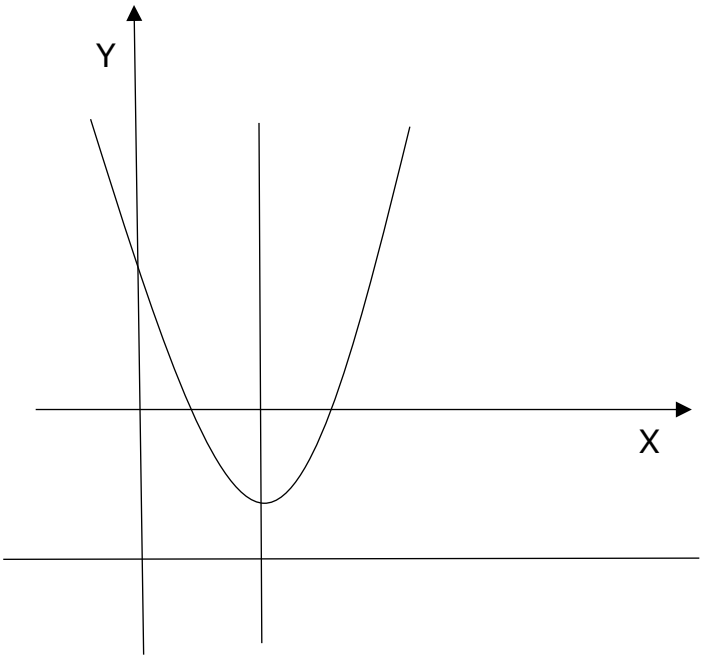
Ecco, anche senza conoscere gli argomenti sopra esposti perché come già spiegato richiedono anni di studi, secondo voi esiste la pur minima possibilità che il/la giornalista non abbia enunciato una boiata da premio oscar?

Scommettiamo che...Risparmiamo la memoria?

Citando il titolo di una famosa trasmissione televisiva, scommettiamo che è possibile disegnare una parabola conoscendo a memoria solo la formula del vertice?
Alzo ulteriormente la posta: disegneremo una parabola basandoci addirittura solo sulla *x* del vertice quindi nemmeno sulla formula completa.
Prima però vediamo più o meno com'è fatta una parabola.
Ricordo una lezione di *emergenza* che feci parecchi anni fa a dei ragazzi di una classe non seguita dal sottoscritto.
Dire che la situazione era disperata sarebbe troppo da ottimisti.
Il giorno prima di una verifica di geometria analitica gli studenti presenti al pronto soccorso matematico arrivati in codice rosso non avevano la più pallida idea neppure di come tracciare una banale forma di una parabola figuriamoci rappresentarla con precisione.
La figura veniva confusa con altre, raffigurata storta, troppo sottile, insomma quello che ne veniva fuori era una vera schifezza.
Sperando di eludere una censura da parte di codesto editore, far comprendere in modo completo e definitivo per lo meno come cavolo era fatta questa benedetta parabola fu molto facile.

- Avete presente quei disegnini osceni che in continuazione scarabocchiate nei vostri quaderni anzi, più in quegli degli altri che nei vostri, nelle porte dei gabinetti, nei muri della scuola e probabilmente anche da tante altre parti in giro per la strada?

Problema risolto!
Ora sapevano almeno com'era la sagoma di una parabola e non lo dimenticheranno mai più.
Tra grasse risate, comprese le mie, proposi alla lavagna la figura di una parabola generica.

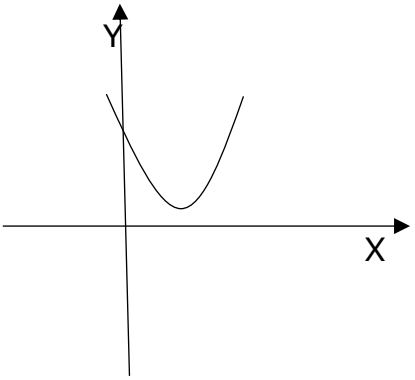


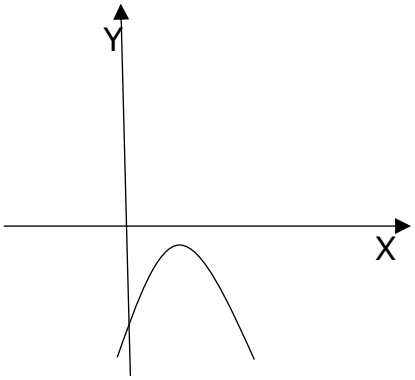
Sperando che il censore abbia ancora un minimo di indulgenza, come si può notare la somiglianza è notevole.
Ne abbiamo di due versioni: una verso il basso e una verso l'alto.
Altre risate ma questa volta me la sono proprio cercata.
Cosa possiamo facilmente notare?

1) La parabola attraversa sicuramente l'asse *y* e lo fa in un solo punto.

Quindi, le versioni troppo strette non si vedranno più.

2) L'incrocio con l'asse *x* invece non è garantito. Infatti, il punto più alto o più basso di una parabola, detto **vertice**, può trovarsi in questa situazione





Delle altre due rette, quella orizzontale è la **direttrice** mentre quella verticale è l'**asse**, ne discuteremo dopo.
Per poter riprodurre la figura geometrica con precisione dobbiamo però avere a disposizione dei punti di riferimento, quelli che appunto ci vengono gentilmente offerti dalle formule.
Ma noi non vogliamo studiare a memoria migliaia di formule!
È un lavoro duro e oltretutto anche inutile.
Avete presente quando siete costretti a compilare decine e decine di fogliettini prima della verifica di matematica o fisica e non sapete più dove nasconderli?
Mi ricordo che per la prima prova scritta dell'esame di maturità mi presentai in piena estate col giubbotto di jeans con i tasconi interni riempiti fino all'orlo di riassuntini e temi già sfornati pronti all'uso.
Purtroppo, tra i testi non uscì assolutamente nulla di ciò che era stato previsto e lo stratagemma servì solo a farmi sudare dal caldo.
Ma quella era un'altra materia!
Con la matematica siamo invece in grado di far fruttare a pieno anche poche informazioni con un vantaggio enorme in termini di risparmio di bigliettini salvavoto.
Ci vuole intelligenza e creatività.

A proposito di creatività, vi racconto un aneddoto che mi riguarda relativo ad un grave problema che avevo da studente con una materia.
Non si trattava certamente di una materia scientifica con le quali me la sono sempre cavata agilmente ma dell'odiatissima *inglese*.
Per carità, la conoscenza delle lingue è fondamentale oggi come lo era nella lontana epoca in cui frequentai le scuole superiori ma noi non imparavamo proprio per niente a colloquiare.

Tutto quello che l'anziana prof ci obbligava a studiare, tanto per cambiare a memoria, era l'inutile inglese commerciale.
Noi saremmo dovuti in teoria diventare dei programmatori informatici, mi spiegate a cosa cavolo ci sarebbe potuto servire addottrinarsi a scrivere lettere commerciali in inglese?
L'unica parte un pochino più *divertente* era quella riguardante la geografia della Gran Bretagna.
Forse sostenere che era divertente è un po' troppo ma per lo meno era semplice.

- Parlami delle British Isles.

Questa era la domanda sempre uguale che la prof faceva a tutti quelli che interrogava per la seconda ed ultima volta dell'anno.
Avete letto bene, due interrogazioni in un anno. Bei tempi.
Prima dell'interrogazione di geografia britannica c'era però quella temutissima sull'inglese commerciale.
Avrei preferito che l'anziana donna mi avesse domandato chi aveva vinto più campionati tra Liverpool e Arsenal o quanti goal avevano fatto quell'anno Ian Rush, Kenny Dalglish e il mio idolo Kevin Keegan ma non c'era margine di trattativa e l'unica alternativa era imboscarsi.
Malattie vere e presunte, interrogazioni urgenti chiaramente fasulle di altri insegnanti, convocazioni dal preside quasi tutte inventate, attacchi di dissenteria quasi tutti veri.
Con questa tattica riuscii incredibilmente a spuntarla fino a giugno.
Ma la scuola stava ormai per terminare e io ero l'unico che non aveva ancora subito i due interrogatori.
Con le spalle al muro fui costretto a recarmi alla cattedra per la prima delle due prove orali, quella sull'inglese commerciale.
La prof iniziò a farmi delle strane domande che non ero in grado di interpretare così, abilmente, la convinsi ad interrogarmi sulla geografia e a rimandare le questioni sulla parte commerciale alla lezione successiva.
In fin dei conti per la proprietà commutativa cosa sarebbe cambiato?
Ci sarebbe stata solo un'inversione di argomenti e il problema dei miei voti finali sarebbe comunque stato risolto nell'arco di due giorni.
In un mix tra stanca e arrabbiata l'insegnante mi permise di invertire gli argomenti:

- Parlami delle British Isles.

E la prima era andata!
Il dilemma era a quei punti come imparare sette mesi di inglese commerciale in due giorni!
Menomale che la mia lampadina già a quei tempi si accendeva nel momento del bisogno e gridando *Eureka* con enfasi pavarottiana, affermai ai compagni di classe:

- Farò una seconda interrogazione sulle British Isles.

- Ma sei scemo? Vuoi farti segare?

Beh, diciamo che oggi mi spavento per molto meno ma a quei tempi ero più temerario e confidando sul fatto che la nostra cara prof non brillava certo per lucentezza mentale ero sicuro, quasi, che l'avrei scampata anche a quel giro.
Arriva il grande giorno e in classe c'era un'atmosfera da tribunale d'inquisizione.
Nessuno fiatava.
Nessuno si distraeva.
Tutti presenti e in attesa della terza guerra mondiale.

- Bene, iniziamo. To whom it may concern…

- No prof, oggi mi doveva interrogare di geografia.

Vi ricordate quando nel film *L'Esorcista* la cameretta della protagonista era diventata gelida come se si trovassero tutti al Polo Nord?
Ecco, penso che William Friedkin prese spunto da quel momento.

- No! Ora mi hai stufato! L'interrogazione di geografia l'hai fatta due giorni fa!

- E no prof, quella sulla geografia è la seconda giusto? Quindi come avrei potuto farla per prima?

La prof iniziò a balbettare e sudare e io la incalzai, con gentilezza s'intende, finché non si arrese.
Non era troppo convinta ma inverosimilmente mi diede ragione:

- Parlami delle British Isles.

Tra le corpulente risate degli amici che avevo dietro la schiena iniziai a rispondere con le stesse frasi di quarantottore prima e presi un meritatissimo 6.
Questione archiviata uscendo dagli schemi.
D'accordo, non sono stato del tutto onesto anzi, non lo sono stato affatto.

Riprendiamo il nostro discorso sulla parabola e vediamo come risolvere una questione matematica sempre senza fare uso dell'assimilazione meccanica ma questa volta in maniera pienamente legale.
Ogni parabola viene individuata in modo univoco dalla sua equazione.
L'equazione di una funzione equivale ai dati identificativi di una persona come età, peso, colore dei capelli, ecc.
I dati identificativi della funzione parabola sono espressi dalla seguente relazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove *a*, *b* e *c* sono dei numeri reali.
Questa ad esempio è l'equazione di una parabola reale (mentre quella che avete appena visto è l'equazione di una parabola generica):

$$y = x^2 - 5x + 6$$

con a=1, b=-5, c=6.

- Prof, perché se non c'è nulla vicino alla *x* al quadrato non si mette *a=0* invece di *a=1*?

- Perché noi sappiamo che se non c'è niente tra due elementi è come se ci fosse una moltiplicazione. Ad esempio, scrivere *-5x* è come scrivere *-5*x*. Quindi se vedo solo una *x* non posso ipotizzare che accanto ci sia uno *0* altrimenti risulterebbe *0*x=0*.

Cosa significa in poche parole che una certa equazione rappresenta una tale parabola?
Significa che se prendiamo una sufficiente quantità di numeri reali, sostituiamo ognuno di questi numeri al posto della *x*, ci mettiamo con la calcolatrice a calcolarne il risultato, cioè la *y,* posizioniamo ogni coppia *(x numero scelto, y risultato della sostituzione)* sugli assi cartesiani e infine uniamo tutti i puntini come in quei giochini che si trovano sulle riviste, allora abbiamo disegnato una parabola.
Riprendiamo la parabola

$$y = x^2 - 5x + 6$$

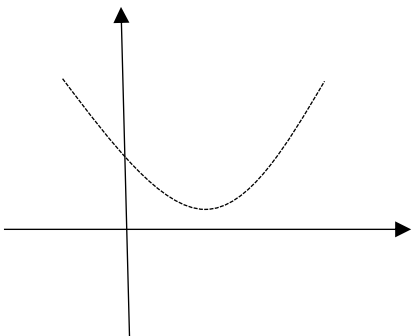
e calcoliamo alcuni di quei punti.

$$x = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 5 * 1 + 6 = 2$$

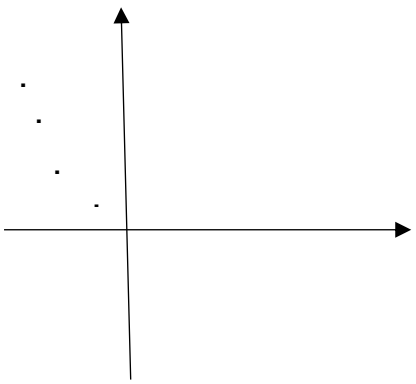
Abbiamo ottenuto il punto *(1,2).*
Continuiamo

$$x = -3 \Rightarrow y = (-3)^2 - 5 * (-3) + 6 = 30$$

Ora possediamo anche il punto *(-3,30).*
Proseguite ancora per qualche minuto scegliendo un intervallo di numeri piuttosto ampio.
Più punti troverete e più precisa sarà la parabola.
Quanto siete stanchi di fare calcoli, disegnate gli assi cartesiani e collocate i punti.



Se il vostro disegno



non assomiglia al mio è solo perché vi siete stancati troppo presto di calcolare i punti.
La matematica richiede dedizione e sacrificio.
Stacchiamo un attimo prima del gran finale.
Vi siete mai chiesti perché gli assi si chiamano cartesiani?

- Da Cartesio, prof.

- Si, ma lui mica si chiamava Cartesio.

- Cosa?

Il suo nome era, **René Descartes**, non era greco, come ho sentito dire, ma francese e non è nato all'epoca di **Archimede** o in quella di **Pitagora** ma nel XVI secolo. Pessima usanza quella di latinizzare prima e italianizzare poi, i nomi dei grandi.

Dopo lo stacco pubblicitario siamo pronti per il gran finale.
Recuperiamo la parabola

$$y = x^2 - 5x + 6$$

La prima ed unica formula che vedremo è quella della *x* del *vertice*

$$V = \left(\frac{-b}{2a}\right)$$

Iniziamo quindi a calcolare la *x* sostituendo i numeri ad *a* e *b*

$$v_x = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$$

E la *y*?
Il *vertice* è un punto della parabola giusto?
Pertanto, basta comportarsi come abbiamo fatto per calcolare i puntini cioè sostituire il numero appena trovato al posto della *x* nell'equazione della parabola

$$v_y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4}$$

Ecco il nostro *vertice*

$$v = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$

Passiamo ora ai punti d'incontro con gli assi.

- Prendendo una generica parabola ed individuandone il punto in cui incontra l'asse *y*, possiamo conoscere con esattezza le coordinate di quel punto?

- Ma se non abbiamo i dati della parabola come facciamo a sapere qual è quel punto?

- Avete ragione. Ma solo in parte perché in realtà una coordinata l'abbiamo anche senza avere i dati precisi della parabola ed è quella della *x* di quel punto.

- Perché?

- Perché è un punto che si trova sull'asse *y* e ognuno di quei punti ha la *x* uguale a 0.

Quindi, ricordando che si tratta di un punto della parabola, per trovarne la *y* basta sostituire la sua *x*, cioè 0, al posto della *x*, nell'equazione

$$y = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$$

Abbiamo il punto in cui la parabola incontra l'asse *y*

$$P_y = (0; 6)$$

Tocca adesso ai punti d'incontro con l'asse *x*.
Seguendo identico ragionamento, conosciamo già le coordinate *y* di quei punti perché si trovano sull'asse delle ascisse perciò hanno tutti ordinata 0:

$$x_1 = (?\,; 0) \quad x_2 = (?\,; 0)$$

Per trovare i punti questa volta sostituiamo quindi lo 0 al posto della *y*

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

Riscriviamo l'equazione al contrario per renderla più semplice

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

La riconoscete?
È l'equazione più famosa del mondo!
L'equazione di secondo grado.
Lo so cosa state pensando.
Avrei barato perché avevo promesso il disegno della parabola con una sola formula e invece pensate che ne sia saltata furori un'altra.
In realtà non è così perché la geometria analitica si insegna dopo il biennio quindi tutto ciò che riguarda equazioni, disequazioni, polinomi, scomposizioni, insomma tutta l'algebra utile, è già stato spiegato e, in teoria, dovrebbe essere noto.
Ma questo, giustamente, è un libro divulgativo quindi apriamo una piccola parentesi dedicata all'*equazione di secondo grado*.

La generica *equazione di secondo grado* è rappresentata così

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Beh, direi che la somiglianza con la generica equazione della parabola è evidente.
Per risolvere un'equazione di secondo grado c'è la super formula che vi perseguiterà fino all'ultimo giorno dell'ultimo anno di scuola data la sua incredibile utilità in moltissimi ambiti

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

I due numerini 1 e 2 che vedete sotto la *x* significano che esistono due potenziali soluzioni.
Infatti, a differenza delle equazioni di primo grado, quelle in cui la *x* non ha esponente, in cui può esistere al massimo una soluzione, in quelle di secondo grado possiamo trovare 2 soluzioni distinte.
Ma potremmo trovarne anche una sola.
Se infatti dentro la radice venisse un bello 0 allora la formula diventerebbe la più banale

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt[2]{0}}{2 \cdot a} = \frac{-b \pm 0}{2 \cdot a} = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Perché? Perché la radice quadrata di 0 è 0.
Notato che la formula appena scritta è la *x* del *vertice*?
Oltre a una o due soluzioni potremmo addirittura non averne nessuna.
Supponiamo infatti che dentro la radice salti fuori dopo il calcolo un numero negativo.
Voi siete in grado di trovare un numero reale che al quadrato fa ad esempio *-4*?
No, giusto?
Quindi se è impossibile calcolare la radice significa che non siamo in grado di proseguire col resto della formula.
Per dirla meglio siamo *impossibilitati*.
Infatti, l'equazione si dice *impossibile*.

Negli altri casi invece basta svolgere banalmente i calcoli e sviluppare la formula una volta col + e una volta col –.
Es con *a=1*, *b=-5*, *c=6*:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Una volta prendiamo il +

$$x_{1=} \frac{5 + 1}{2} = 3$$

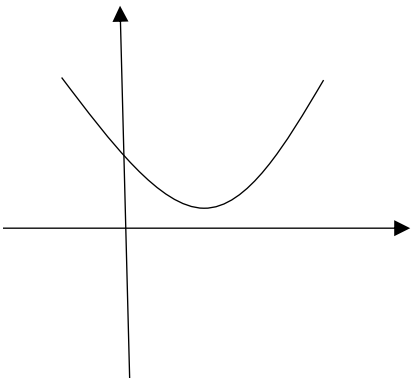
E una volta il –

$$x_{2=} \frac{5 - 1}{2} = 2$$

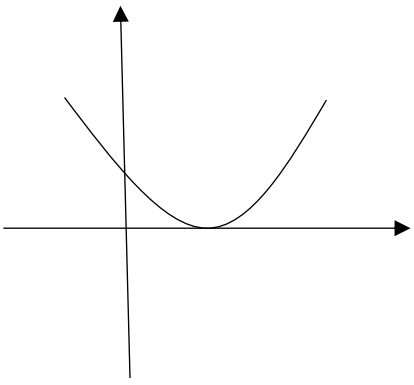
Difficile? Non credo proprio.

Chiudiamo la parentesi sulle equazioni di secondo grado torniamo alla nostra parabola.
Stavamo calcolando i punti in cui la parabola attraversa l'asse *x* ma vi racconterò un segreto: lo abbiamo appena fatto con l'esempio sull'equazione di secondo grado!
Quindi i nostri punti sono sono *(3,0)* e *(2,0).*
E se l'equazione di secondo grado usata per determinare gli incontri con l'asse *x,* non ci desse due soluzioni?
Lo so, vi state ricordando che la vostra prof vi diceva che esistono le parabole con a>0, a<0, c=0, ecc., ecc.
Del resto, anche con l'equazione di secondo grado vi avranno raccontato che dovevate distinguere tutta una serie di casi e invece noi ce la siamo cavata con poche righe.
Non conosco il motivo per cui molti insegnanti di matematica si ostinino a rompere le scatole trasformando le lezioni in inutile nozionismo.
Alcuni forse fanno melina per attendere il suono della campanella.

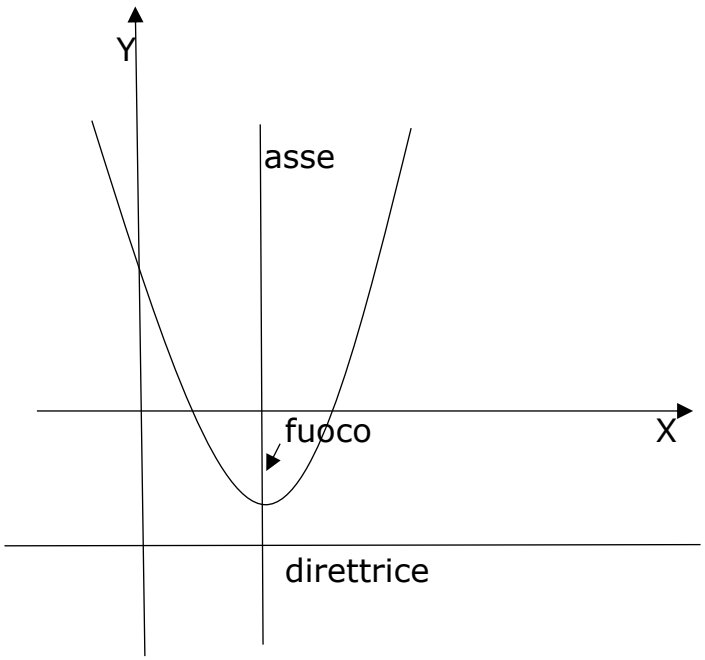
Per altri probabilmente si tratta di vera e propria ignoranza.
Sapevate che per insegnare matematica a scuola basta una laurea in economia, facoltà dove hanno un solo esame di matematica oltretutto anche sempliciotto?
Altri prof invece adorano evidentemente il sadismo.
Qualunque sia la loro motivazione a noi interessa poco.
L'importante è come sempre imparare a memoria il meno possibile e sfruttare al massimo le immense potenzialità del nostro cervello!
Dicevamo, se non possiamo avere i punti d'incontro con l'*asse x* perché l'equazione di secondo grado è impossibile allora significa che la parabola non attraversa l'asse quindi sarà o tutta sopra o tutta sotto e per disegnarla terremo conto di dove si trovano vertice e il punto d'incontro con l'*asse y*



Se invece l'equazione di secondo grado da un solo risultato allora significa che la parabola tocca l'asse in un solo punto e, poiché quel punto dovrà per ovvi motivi pratici di disegno essere il più alto o il più basso della parabola, allora quel punto deve per forza corrispondere al vertice



In teoria avremmo anche finito perché i punti chiave per disegnare una parabola li abbiamo ma con poco altro sforzo piazziamo anche l'*asse*, la *direttrice* e il *fuoco*.



L'*asse* della parabola è quella retta parallela all'asse *y* che taglia in due la parabola stessa.
Poiché per segarla in due parti uguali deve per forza passare per il *vertice*, allora la sua equazione sarà quella di una retta non inclinata in cui la *x* ha sempre lo stesso valore e quel valore è chiaramente la *x* del vertice:

$$x = \frac{5}{2}$$

Ora aggiungiamo una cosettina a memoria.
Lo so, questa volta ammetto di avere barato ma è una formula microscopica:

$$\frac{1}{4a}$$

Nel nostro caso:

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$$

Il *fuoco* è un punto che sta dentro la parabola e ha la stessa *x* del vertice.
La *direttrice* è una retta parallela all'*asse x* che sta fuori dalla parabola.
Ebbene, le distanze tra *direttrice* e *vertice* e tra *fuoco* e *vertice* sono identiche e indovinate un po' quanto misurano?

- Uno fratto quattro a

- Grandi!

Per calcolare quindi fuoco e direttrice basta rispettivamente aggiungere e togliere quel valore alla *y* del *vertice*:

$$F = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{5}{2}; 0\right)$$

$$direttrice: y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Con una quantità infinitesimale di studio mnemonico abbiamo imparato come rappresentare qualsiasi parabola e già che c'eravamo come calcolare qualsiasi equazione di secondo grado.
Missione compiuta!

La temutissima triade

Ho meditato a lungo prima di decidere se inserire o meno in un libro divulgativo argomenti che tanto divulgativi non sono anzi, sono piuttosto complicati.
Allo stesso tempo però un manuale del genere deve servire, come ho già spiegato, anche per rompere il ghiaccio su temi ostili e fare venire voglia di approfondire le proprie conoscenze senza timore per questa materia considerata ostica molto spesso in modo non giustificato.
Quindi rimbocchiamoci le maniche e iniziamo col passare il primo step della terribile triade composta da *limiti*, *derivate*, *integrali*.

Limiti

Non scorderò mai quella triste mattina di fine primavera quando la professoressa G entrò in classe e dopo aver scritto questa cosa alla lavagna

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:$$

$$x \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}\ con\ |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

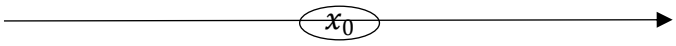
esclamò soddisfatta:

- Questa è la definizione di limite. Studiatela a memoria!

La cosa divertente è che qualcuno per davvero studiò quell'obbrobrio a memoria come se farlo sarebbe servito a qualcosa.
Perché la maledetta fece questo?
Mi verrebbe da rispondere che essendo non una matematica ma una laureata in economia potrebbe non averci capito una beata mazza.
Noi per fortuna siamo molto più intelligenti della vecchiaccia che nella sua vita da "insegnante" chissà quanti danni ha combinato e ci sforzeremo per capirci qualcosa.
Iniziamo dalla definizione di *limite* di una funzione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Si legge: il limite di una funzione per *x* che tende a *x* con 0 è *l*.
Prima di discutere di limiti parliamo però un attimo degli *intorni*.



Abbiamo rappresentato l'intorno di un numero reale x_0 che consiste nell'insieme dei numeri appartenenti all'intervallo [a,b] di cui x_0 è il centro.
Trattandosi di numeri reali sappiamo che possiamo rimpicciolire quanto vogliamo l'intorno (o l'intervallo) che quest'ultimo conterrà sempre infiniti numeri.
Ora torniamo al limite di una funzione e cerchiamo di capirne il senso con un esempio.
Prendiamo la funzione

$$f(x) = x - 2$$

e cerchiamo il suo limite per *x* che tende a 3

$$\lim_{x \to 3} x - 2$$

Considerando un intorno di 3 proviamo ad avvicinarci a questo numero calcolando allo stesso tempo il valore *x-2*

x	y
1	-1
2	0
2,5	0,5
2,9	0,9
2,99	0,99
2,999	0,999

Partendo ad esempio da 1 il valore della funzione, ottenuto sostituendo 1 al posto della *x*, è 1-2=-3

Proseguendo con i calcoli avvicinandoci sempre di più al numero 3 notiamo che anche il valore della funzione si avvicina sempre di più ad un valore.
Quel numero è 1 e rappresenta appunto il limite della nostra funzione quando *x* si avvicina a 3.
Per gli amanti della precisione aggiungeremo che ci siamo avvicinati a 3 da sinistra, cioè da numeri inferiori a 3

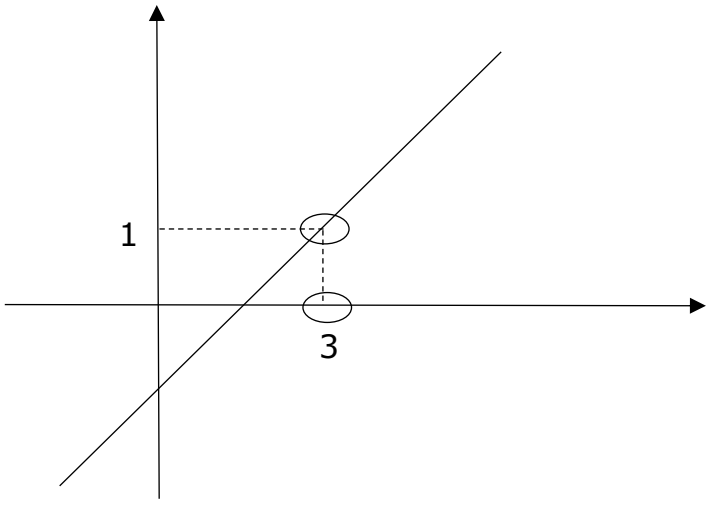
$$\lim_{x \to 3^-} x - 2 = 1$$

Il risultato è identico se ci avviciniamo da destra, cioè da numeri più grandi di 3

$$\lim_{x \to 3^+} x - 2 = 1$$

x	y
5	3
4	2
3,1	1,1
3,01	1,01
3,001	1,001

Adesso i valori della funzione decrescono ma a un certo punto si appiattiscono e raggiungono nuovamente il limite 1.
Graficamente la situazione è questa



In pratica si vede che se ci muoviamo con le *x* in un intorno di 3 piccolo quanto ci pare, i valori della funzione si troveranno sempre in un intorno di 1.
Ovviamente trattandosi di una funzione i suoi valori sono piazzati sull'*asse y*.
Ci potremmo per i nostri scopi tranquillamente fermare qui ma andiamo avanti e scriviamo ciò che abbiamo visto, con linguaggio matematico.
Quindi, se prendiamo un numero reale ε piccolissimo quanto ci pare, troveremo sempre un numero reale δ tale che se con quest'ultimo costruiamo un intorno di 3 allora il valore della funzione apparterrà sempre a un intorno di 1

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \ \delta > 0 : \forall\, x \in\,]3-\delta, 3+\delta[\ , f(x) \in\,]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$$

Lo so, non è certo l'argomento più semplice del mondo ma se non vi è ancora chiaro riguardate l'esempio numerico e confrontatelo con la definizione e il grafico.
Vedrete che ci si arriva.
Dalla definizione relativa all'esempio passiamo alla definizione generica di limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ ]x_0-\delta, x_0+\delta[, \delta > 0 : se\ x \in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\ \ \Rightarrow\ f(x) \in\,]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$

Quella che invece trovate sui libri scolastici normalmente è la seguente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : x \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}\ con\ |x - x_0| < \delta\ \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Niente allarmismi! Le due definizioni coincidono perfettamente.
Infatti, la scrittura

$$|x - x_0| < \delta$$

è equivalente alla seguente

$$\begin{cases} x - x_0 < \delta \\ x_0 - x < \delta \end{cases}$$

Questo perché l'espressione $|a|$ si legge *valore assoluto* di *a* e vuol dire che se *a* ha un valore positivo allora il suo valore assoluto sarà *a* preso così com'è senza segni, altrimenti sarà -a.
In questo modo il valore assoluto restituisce sempre un valore positivo.
Dall'ultima espressione scritta otteniamo, spostando x_0

$$x - x_0 < \delta \Rightarrow x < x_0 + \delta$$

e

$$x_0 - x < \delta \Rightarrow x_0 - \delta < x$$

Uniamo le due cose

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Ma dire che *x* rispetta questi parametri è come dire che x appartiene all'intervallo

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Lo riconoscete vero?
Lo abbiamo visto nella definizione generica di limite.
Evidentemente, ripetiamo lo stesso identico ragionamento per la funzione

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(x) - l < \varepsilon \\ -f(x) + l < \varepsilon \end{cases}$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

E per la seconda volta vi ripeto che per i nostri scopi potremmo fermarci a questo punto senza rimorsi di coscienza.

Allo stato attuale ne sapete già molto di più della mia vecchia prof ma quando il gioco si fa duro i duri cominciano a giocare, quindi vi faccio vedere ancora qualcosina.
Questa volta calcoliamo il limite incrementando la *x* sempre di più ovvero, la facciamo tendere all'infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

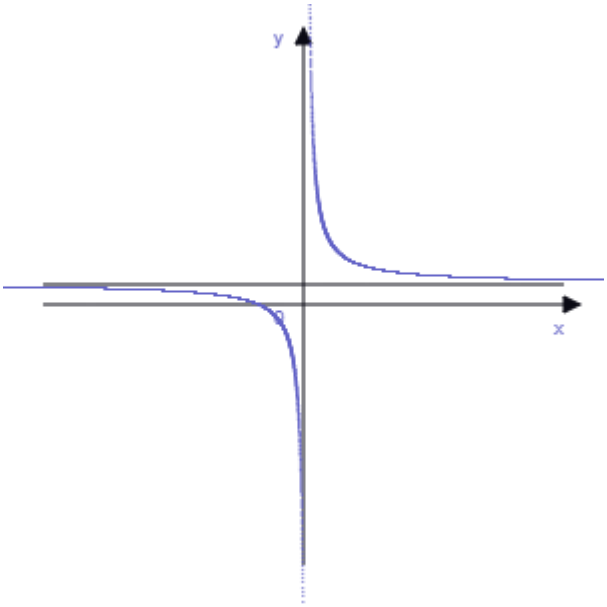
Studiamo cosa accade ad esempio alla funzione

$$y = \frac{x+1}{x}$$

Notato che invece di *f(x)* abbiamo scritto *y*? È assolutamente la stessa cosa, dato che stiamo parlando di una funzione.
Diamo valori sempre più grandi alla *x*

x	y
1	2
2	1,5
3	1,333
4	1,25
….	….
1000	1,001

Mentre la *x* aumenta cosa capita alla funzione?
Il valore della funzione tende ad avvicinarsi sempre più a 1 quindi, 1 è il suo limite quando *x* tende all'infinito.
La stessa cosa, provate, succede se *x* la facciamo tendere a valori sempre più piccoli cioè, a *meno infinito*.
Graficamente la situazione è la seguente



Siamo pronti per passare al linguaggio matematico.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

La diversità rispetto alla definizione precedente è che tendendo *x* a valori sempre più grandi (o più piccoli) il suo intorno è espresso molto più semplicemente:

$$x > \delta$$

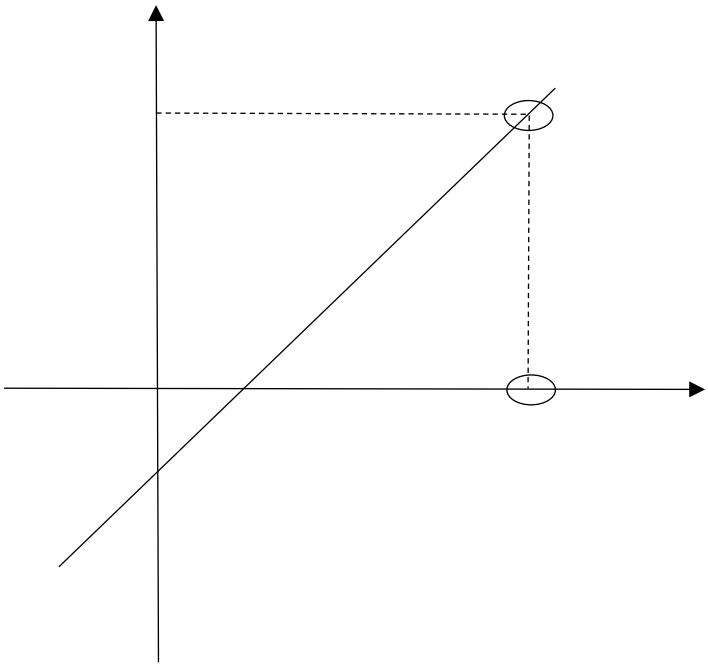
Dai, lo sento che vi state gasando; alzo ancora la posta
Ora a crescere sempre di più sono sia la *x* che la funzione.

$$f(x) = x - 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x - 2$$

x	y
1	-1
2	0
3	1
4	2
1000	998

Graficamente la situazione è la seguente



Passiamo alla definizione

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

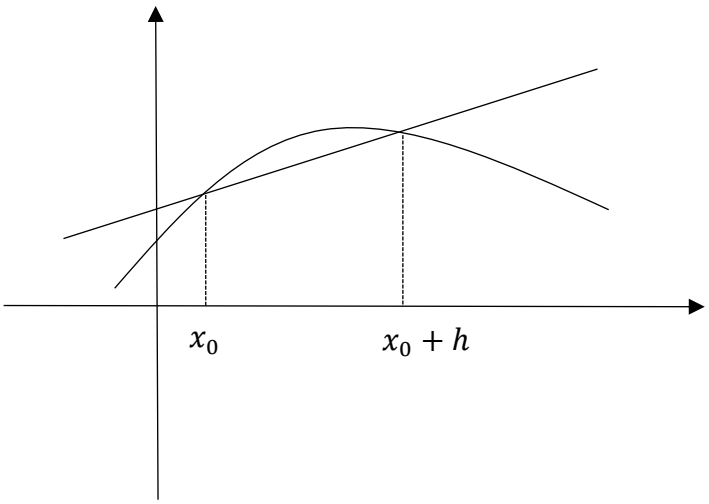
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x > \delta\ x \in \mathcal{R} f(x) > \varepsilon$$

Se siete arrivati fino a questo punto significa che non avete ancora gettato il libro dalla finestra quindi dichiaro ufficialmente che sono molto fiero di voi.

Chi ha studiato i limiti a scuola potrà obiettare che non abbiamo visto nemmeno un esercizio ma, ricordo, questo non è un libro di testo per le scuole superiori e tantomeno un eserciziario.
Se poi in futuro deciderò in una seconda edizione di inserire anche qualche esempio pratico allora sarete i primi ad averne notizia.
Vi farà comunque piacere sapere che la parte teorica appena imparata è di gran lunga più complicata degli esercizietti sui imiti che si imparano a scuola e sono sicuro che chi avrà voglia ora di prendere in mano un libro delle superiori rimarrà estremamente sorpreso di quanto gli risulterà facile ora risolvere compiti sui limiti che prima parevano fantascienza.

Derivate

Partiamo subito con un bel grafico.

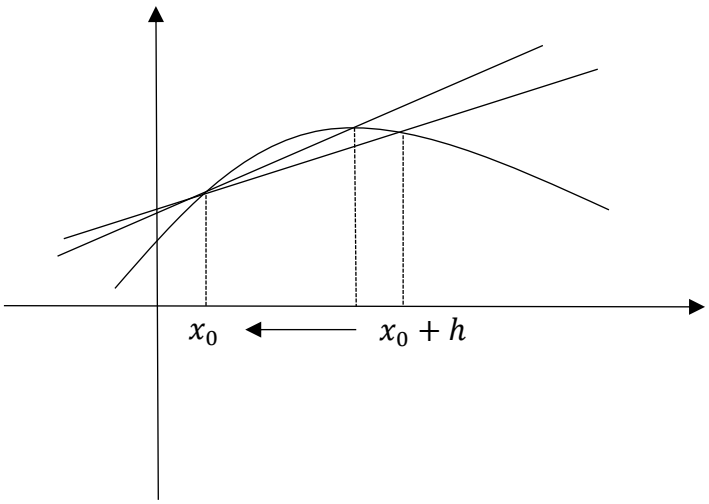


La curva rappresenta la nostra funzione *f(x)*.
La retta incontra la curva in due punti di cui il secondo è calcolato incrementando il valore del primo di una certa quantità *h*.
Ora supponiamo di far decrescere *h* in modo che il punto $x_0 + h$ si avvicini sempre più a x_0.
Contemporaneamente calcoliamo la differenza tra il valore della funzione in $x_0 + h$ e x_0 e lo facciamo mentre *h* rimpicciolisce fino a far coincidere i due punti.

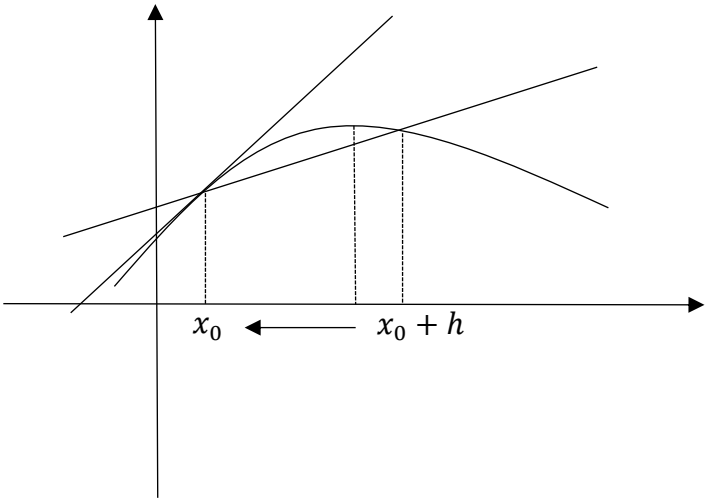
In parole povere calcoliamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Intanto, udite udite, la scritta sopra è già la definizione della derivata della funzione in un punto quindi ci potremmo anche ritenere soddisfatti ma come al solito facciamo un passo oltre e vediamo cosa succede alla retta se *h* tende a 0.
Supponiamo di sostituire il tratto di disegno della retta con un filo inchiodato nel punto x_0.
Se *h* diminuisce sempre di più allora evidentemente il punto x_0+h si accosta di pari passo a x_0 pertanto è come se il filo ruotasse in senso antiorario intorno al chiodo



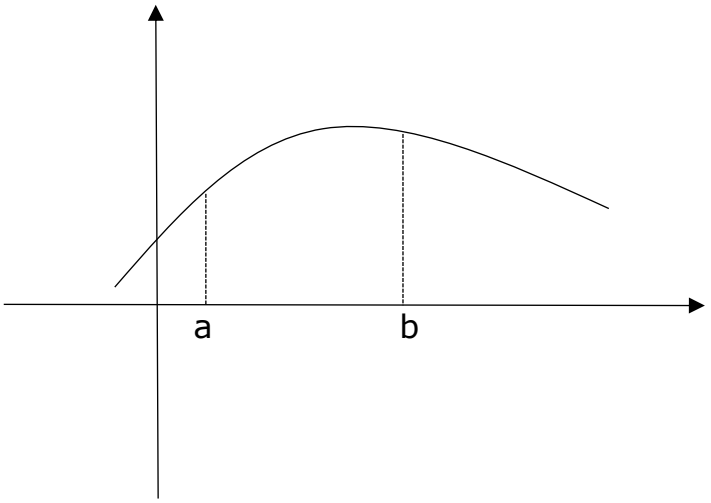
Ma se il limite a cui può arrivare x_0+h facendo tendere *h* a 0 è x_0, come si rappresenta il limite della retta passante per i due punti sempre tenendo conto che *h* arriverà a 0?



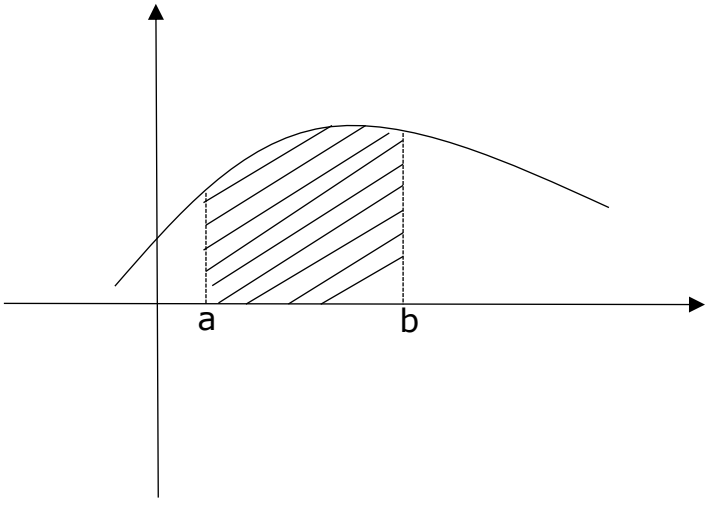
Eccolo lì il limite a cui può tendere la retta: è una retta tangente alla curva nel punto x_0.
Oltre non può ruotare.
Riassumendo, abbiamo utilizzato i limiti per comprendere le derivate.
A cosa servono queste derivate?
Ad esempio, per calcolare l'accelerazione di un veicolo (fisica), l'incremento della produzione di un prodotto (economia), il tasso di decrescita di una popolazione (statistica).
Le formule per il calcolo delle derivate sono quanto di più semplice in tutto il panorama matematico.
Evitiamo come sempre per non sfociare nell'eserciziario, di fare la banale panoramica di tali formulette riservandocele per un'eventuale edizione più adatta agli studenti delle scuole superiori ma se vi ho stimolato la curiosità andate a spulciarvele per verificare con mano che il calcolo delle derivate è uno degli argomenti più facili da studiare.

Integrali

Ancora una volta iniziamo da un disegno.



Il nostro scopo è calcolare l'area della parte di piano situata sotto la curva *f(x)* e sopra il segmento [a,b] dell'asse *x*

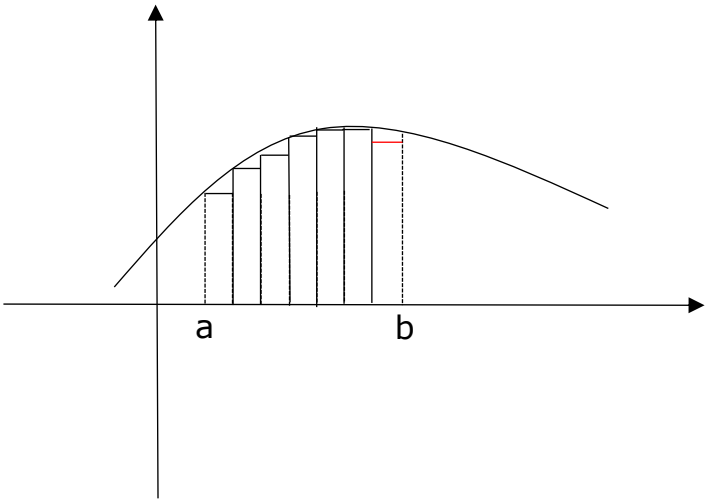


Indovinate un po'? Il valore di quell'area è proprio un integrale e in particolare è un *integrale definito tra a e b*

$$\int_a^b f(x)dx$$

Calcolare tale area è un'impresa tutt'altro che complessa.

Basta infatti suddividerla in tanti rettangoli e sommare la somma delle aree di questi ultimi:



Per far sì che la somma dell'area desiderata coincida il più possibile con la somma delle aree dei rettangoli basta disegnare più rettangoli possibili.
Facciamo in modo che abbiano tutti la stessa base Δ_x.
L'area di un singolo rettangolo sarà data dalla base per l'altezza ossia, dalla base per il valore della funzione in ogni singolo punto della retta *x*.
Quindi il primo rettangolo avrà area

$$\Delta_x \cdot f(a)$$

Il secondo avrà area

$$\Delta_x \cdot f(a + \Delta_x)$$

E così via fino a calcolare l'area dell'ultimo rettangolo.
Se desideriamo una misura accuratissima dobbiamo per forza di cose usare più rettangoli possibili ovvero, rimpicciolire sempre più le basi dei rettangoli.

L’integrale definito è per l’appunto la somma di moltissimi rettangolini, tutti con la stessa base, in modo che la somma di tutte queste aree corrisponda alla parte di piano presa in considerazione.

Direi che vi siete meritati un bell’applauso.
Spero che la teoria appena esposta via abbia spronato ad un approfondimento della matematica senza più paura di non capirci niente.
Chi è giunto indenne fino a queste righe possiede tutte le carte in regola per proseguire con questa ostica ma splendida materia.

Gioventù non bruciata

Immaginate di essere al cinema o spaparanzati sul divano guardando un film in cui è presente il classico scienziato, spesso pazzo, che inventa qualcosa di incredibile che non si era mai visto prima.
Vi faccio una domanda della quale conosco già la risposta.
Lo scienziato è giovane o anziano?
Sapevo che avreste risposto così.
In realtà le cose non stanno come ci si immagina e molte scoperte nel campo della scienza e in particolare della matematica, sono opera di cervelloni in erba.
Quando **Marie Curie** ha vinto il suo primo premio Nobel aveva solo 36 anni, 4 in meno del capitano della nazionale italiana Dino Zoff nel momento in cui con i compagni di squadra vinse i mondiali di calcio del 1982.
Vogliamo esagerare?
Allora parliamo di **Blaise Pascal** che a 31 anni appese al chiodo i libri di matematica e fisica per dedicarsi alla filosofia.
Beh, direi che ne aveva pieno diritto dato che il suo famoso trattato sulla geometria proiettiva lo aveva elaborato a 16 anni!
Pascal, Blaise per gli amici, collaborò anche con **Fermat**, un tizio di cui dibatteremo più avanti.

Ora vi esporrò due simpatiche storielle che riguardano due giovani promesse della matematica.
La prima è su un bimbo delle elementari, un discolo che di cognome faceva **Gauss** e che, a quanto pare, con i suoi amichetti rompeva talmente le scatole al maestro che questo per farli stare buoni per un bel po', obbligò la classe a sommare tutti i numeri da 1 a 100.
Che ci vuole, penserete voi.
Bene, provate e quando sarete stanchi avvisatemi.
Il maestro è stato veramente furbo perché il calcolo apparentemente semplice è in realtà tremendamente lungo.
Lo sarebbe anche oggi con la calcolatrice e i continui dubbi di aver saltato o meno una cifra, pena, riiniziare il procedimento daccapo.
Figuriamoci quanto poteva essere arduo nel 1700.
Vedo con la mente il maestro gongolante che mentalmente pensava: "Vi ho fregati piccoli rompiscatole!".
Il riposino del maestro però durò pochi fugaci attimi perché il piccolo scocciatore Gauss terminò in tempo record.

Ora, immaginate di essere voi, il maestro saputello convinto di poter manipolare le acerbe menti a vostro piacere e quando meno ve lo aspettate, un insignificante nanerottolo vi sta sputtanando per l'eternità.
Ma come cavolo ha fatto Gauss a sommare 100 numeri prima che il suo lungimirante insegnante si fosse sistemato la sedia per godersi un po' di riposo?
Intanto scriviamo i numeri.

$$1, 2, 3, 4, \dots, 98, 99, 100$$

Gauss vide che sommando i due numeri esterni della sequenza e ripetendo il calcolo eliminando via via proprio la coppia appena usata, la somma era sempre 101.
Mi spiego meglio:

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

Che colpo da vero campione!
A questo punto era sufficiente conoscere il numero delle coppie e questo era banale

$$\frac{100}{2} = 50$$

Risultato:

$$101 \cdot \frac{100}{2} = 5050$$

Dalla botta di genio di un pargoletto abbiamo la formula generica della somma di tutti i numeri naturali da 1 fino ad un generico numero *n*:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Il secondo aneddoto che mi permetto di esporre è su un personaggio che mi ha sempre affascinato: l'immenso **Évariste Galois**.
Cosa combinò questo ragazzo nella sua tormentata fanciullezza?
I fin dei conti niente di che.
Dimenticavo, con il viso ancora coperto di acne adolescenziale trovò la soluzione ad un problema su cui si dibatteva da 350 anni e che riguardava la risolubile per radicali di un polinomio!
Insomma, robetta dai.
Dai suoi lavori nascono una teoria che porta il suo nome, **Teoria di Galois**, e la **Teoria dei Gruppi**, due importantissime branche dell'algebra astratta.
Roba molto complicata. Per pochi.
Era talmente geniale che può essere considerato a mio giudizio il Maradona della matematica ma il suo talento stupisce ancora di più se pensiamo che tutta la sua gigantesca opera è frutto di una manciata di anni dato che morì che di anni ne aveva solo 20.
Giusto per fare un confronto, Jim Morrison morì a 27 anni ed è considerato un mito anche per questo.
Se Galois non è ancora diventato un vostro idolo allora vi faccio sapere altre cosette interessanti.
Intanto fu bocciato due volte all'esame di ammissione per l'École Polytechnique.
Succede.
Poi tentò più volte ma senza mai riuscirci a pubblicare la sua memoria sulla teoria delle equazioni.
Venne rifiutata persino da **Cauchy**, uno dei più grandi matematici di tutti i tempi.
Invidia o Cauchy semplicemente non era all'altezza di comprendere i lavori di qualcuno più bravo di lui?
Altri suoi importanti risultati, non compresi all'epoca, vennero rigettati persino dal grande **Poisson** e qui mi scuso di persona per il disguido visto che Poisson ha molto a che fare con la mia tesi di laurea.
Galois purtroppo ricevette gli onori al merito solo dopo la sua morte.
Già, ma un simile personaggio a metà tra la realtà e la mitologia come sarà morto?

Beh, uno come lui non poteva certamente morire a causa di una malattia.
Se state pensando ai soliti troppi eccessi tipici dei geni che bruciano le tappe siete fuori strada.
Le sue gesta di rivoluzionario repubblicano, Galois era tutt'altro che un secchione, durante la fase di restaurazione post-napoleonica non hanno di sicuro collaborato a rendergli scorrevole l'esistenza ma non è stata neppure la politica a toglierlo di mezzo.
A provocare la morte di Galois indovinate un po' cos'è stato? Una donna!
E ti pareva.
Ma con tutte le effervescenti francesine che poteva affascinare anche grazie al suo intelletto fuori del comune si doveva per forza innamorare di una promessa sposa?
Oltretutto fidanzata con un abile pistolero?
Lo so, non stiamo parlando del Far West ma i duelli d'onore nella Francia del 1800 erano all'ordine del giorno.
Galois non si godette nemmeno la notte prima del duello perché, ben consapevole che molto probabilmente sarebbe morto, la passò a sistemare i suoi lavori matematici tralasciando chissà quante scoperte di cui nessuno è mai venuto a conoscenza.
Ora lo è un vostro idolo vero?

Concludiamo il capitolo sul tempo con un altro mito: **Pierre de Fermat**.
Questa volta non vi narrerò le gesta di un giovane ma vedremo il tempo sotto un altro aspetto.
Intanto vi farà piacere sapere che il grandissimo matematico Pierre de Fermat non era un matematico bensì un avvocato.
Avete letto bene.
Fermat si occupava di matematica solo per diletto nel tempo libero.
Sapete com'è, tra una causa e l'altra ci si annoia e una volta individui un metodo per trovare i massimi e minimi delle funzioni (ovviamente prima che venga scoperto il calcolo differenziale altrimenti sono buoni tutti), un'altra volta ti occupi di ricerche sulla *Teoria dei Numeri* prima ancora che qualcuno la inventi, un pomeriggio fai delle scoperte sulla *Geometria Analitica* e la sera scrivi una letterina a Pascal comunicando da pari a pari.
La normale quotidianità dell'avvocato Fermat.

Una sera del 1637 prima di andare a dormire Fermat scrisse su una pagina dell'**Arithmetica** di **Diofanto di Alessandria** il seguente commento:

"Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet"

In pratica espose il celeberrimo **Teorema di Fermat**, aggiungendo testualmente:

"Ho una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non entra nel margine stretto della pagina"

La dimostrazione non fu mai trovata e Fermat diede il calcio d'inizio a quello che probabilmente è l'enigma più famoso e coinvolgente di tutta la teoria della matematica.
Il teorema, anche se in realtà non esistendo a quei tempi la dimostrazione si sarebbe dovuto chiamare congettura, è il seguente:

$$a^n + b^n = c^n$$

Ebbene, Fermat sosteneva che con *a, b, c, n* interi positivi l'equazione sopra non aveva soluzione per $n>2$.
Da quel momento nel mondo accademico si scatenò l'inferno e qui entra in gioco il discorso sul tempo che avevo lasciato in sospeso.
I migliori matematici del mondo dal XVII secolo in poi si fecero letteralmente friggere le meningi per cercare di dimostrare il teorema.
Eulero scoprì la dimostrazione solo per $n=2$ e solamente nel XVIII secolo e un suo discepolo, **Adrien-Marie Legendre**, per n=5.
Marie-Sophie Germain, la grande matematica francese costretta per anni a spacciarsi per il matematico maschio **Antoine-August Le Blanc** altrimenti sarebbe stata esclusa dal mondo accademico, fece ulteriori passi avanti verificando il teorema per particolari numeri primi.

Nel 1908 fu persino indetto un premio di 100.000 marchi dall'industriale tedesco Paul Wolfskehl, destinato a chi avesse risolto una volta per tutte il teorema.
A mettere i soldi in saccoccia, sebbene la svalutazione ridimensionò parecchio il valore iniziale, ci riuscì il matematico inglese **Andrew Wiles** nel 1994 dopo ben sette duri anni di lavoro.
Andrew Wiles nonostante al grande pubblico sia decisamente meno noto di **Pitagora**, **Eulero**, **Galileo**, ecc., ecc., è con pieno diritto considerato uno dei migliori matematici di tutti i tempi ed è uno dei pochissimi che conosce tutta la matematica esistente!
Vi rendete conto? Al mondo esiste una manciata di persone che sa tutto, ma veramente tutto, di matematica!
Facciamo il punto della situazione.
Fermat scrive il suo quesito nel 1637.
Ci sono voluti ben tre secoli per giungere alla dimostrazione e nel frattempo chi ci ha provato ha fatto delle scoperte incredibili i cui frutti si usano tuttora in matematica e di conseguenza nella vita reale di tutti i giorni (chimica, fisica, astronomia, tecnologia,…).
Il matematico che ha dimostrato il teorema non si è arreso per ben sette anni e alla fine a differenza dei suoi predecessori ce l'ha fatta.
Quindi la morale quale sarebbe?
John Cena direbbe "Never give up" e avrebbe perfettamente ragione.
Nella matematica come del resto nella vita, quello che conta non è tanto il risultato ma lo sforzo enorme compiuto per ottenerlo.
Non importa se la nostra meta pare impossibile da raggiungere.
I tentativi effettuati per arrivarci daranno comunque risultati che saranno sempre più soddisfacenti e il miglioramento è garantito.

Sperando di avervi non solo insegnato qualcosa ma soprattutto incuriosito e convinto che vale la pena di approfondire questa incredibile disciplina purtroppo spesso considerata troppo difficile e noiosa da imparare, vi lascio fiducioso in attesa, vedremo se sarà il caso, di proseguire il discorso con un secondo volume.

Ciao!

Colophon

Autore: G. Grant Indite
Titolo: Matematica per tutti (o quasi).
Anno: 2026

Formato: PDF
Licenza: Creative Commons BY-NC 4.0

Questo libro può essere letto, condiviso e utilizzato
per scopi educativi non commerciali,
citando l’autore.

Distribuzione gratuita:
Internet Archive